

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»
(СибГУТИ)
ХАБАРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОКОММУНИКАЦИЙ (ФИЛИАЛ)
(ХИИК СибГУТИ)
СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

**ЕН.03 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

для специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование

Хабаровск
2023г

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» разработаны на основе рабочей программы «Теория вероятностей и математическая статистика» по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Разработчик:

Калиниченко Ю.А. – преподаватель ХИИК СибГУТИ

Рассмотрены на заседании ПЦК ИСП

Протокол № _____ от _____ 20____ года

Председатель ПЦК _____ О.В. Диденко

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа № 1 «Решение задач по теме «Основные соединения и принципы комбинаторики»	4
Практическая работа № 2 «Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятностей и с применением элементов комбинаторики»	9
Практическая работа № 3 «Вычисление вероятностей сложных событий. Вычисление полной вероятности и вероятностей гипотез Байеса»	15
Практическая работа № 4 «Вычисление вероятностей с помощью схемы Бернулли»	19
Практическая работа № 5. «Построение закона распределения и функция распределения ДСВ. Вычисление основных числовых характеристик ДСВ»	24
Практическая работа № 6. «Вычисление числовых характеристик НСВ. Построение функции плотности и интегральной функции распределения»	29
Практическая работа № 7. «Вычисление вероятностей и числовых характеристик для равномерного, нормального и показательного распределения НСВ»	35
Практическая работа № 8. «Построение эмпирической функции распределения. Вычисление числовых характеристик выборки. Точечные и интервальные оценки»	41
Практическая работа № 9. «Проверка гипотезы о законе распределения на основе критерия Пирсона»	51
Практическая работа № 10. «Вычисление коэффициента корреляции»	55
Список источников	66

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Тема: Решение комбинаторных задач

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по решению комбинаторных задач.

знать:

- понятие комбинаторики;
- понятие комбинаторной задачи;
- основные принципы комбинаторики;
- основные соединения комбинаторики.

уметь:

- применять принципы комбинаторики и формулы соединений комбинаторики.

Подготовка к работе:

- повторить что такое комбинаторика;
- повторить что такое комбинаторная задача;
- повторить основные принципы комбинаторики и основные соединения комбинаторики.

Задание: Решить комбинаторную задачу.

Вариант	Задание
1.	1. Сколько различных перестановок можно сделать из букв слова «МАТЕМАТИКА»? 2. Сколькими способами из группы в 20 человек можно составить команду из трёх человек? 3. В соревнованиях участвуют 5 человек. Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места (по одному человеку на место) на соревнованиях? 4. Сколькими способами можно выбрать 4 фигуры, так, чтобы среди них было 2 коня из шахматных фигур (32)?
2.	1. Сколько трёхзначных чисел можно составить из простых чисел, если каждая из этих цифр может повторяться? 2. В понедельник в пятом классе 5 уроков: музыка, математика, русский язык, литература и история. Сколько различных способов составления расписания на понедельник существует? 3. Есть книги 8 видов. Сколькими способами можно составить наборы из четырёх не повторяющихся книг?

	4. Сколькими способами среди 20-ти участников конкурса можно распределить призы: 4 флешки, 3 магнитофона, 1 компьютер?
3.	1. Сколько различных двухзначных чисел можно образовать из цифр 1, 3, 4, 5 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр? 2. Сколько различных комбинаций по семь букв можно составить из элементов О О N S N O S? 3. Сколькими способами можно выбрать трёх нападающих из 10? 4. В магазине «Все для чая» есть 7 разных чашек и 4 разных блюдца. Покупают две чайные пары. Сколько вариантов наборов можно купить?
4.	1. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 2, 5, 9, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз? 2. Сколько можно составить сигналов из 7 флажков различного цвета, взятых по три? 3. Сколькими способами можно составить наборы Новогодних открыток по 5 штук, если их имеется в наличии 9 видов? (открытки могут повторяться) 4. В группе 23 студента. Из нее надо выделить 4 бригады, причем в первую бригаду должны входить 4 человека, во вторую – 6, в третью - 5 и в четвертую - 7. Сколькими способами это можно сделать?
5.	1. Сколькими способами можно выбрать две точки из шести точек на прямой? 2. Сколько «слов», каждое из которых состоит из пяти различных букв можно составить из букв слова «ОБРАЗ»? 3. Даны три стакана сока – апельсиновый, яблочный и виноградный. Студент решил последовательно выпить два стакана. Сколькими способами это можно сделать. 4. У англичан принято давать ребенку несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен 250, а ему дают не более трех имен?
6.	1. Сколько различных перестановок можно сделать из букв слова «КАРАНТИН»? 2. Сколькими способами можно выбрать 6 неповторяющихся книг по информатике из 8? 3. На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

	4. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую - 5 и в третью - 12. Сколькими способами это можно сделать?
7.	1. Сколько двухзначных чисел можно составить из простых чисел, если каждая из этих цифр не может повторяться? 2. Из восьми намеченных кандидатов нужно выбрать трёх тренеров одинаковой специализации. Сколькими способами можно это сделать? 3. Сколькими способами можно распределить пять должностей между пятью лицами, избранными в президиум спортивного общества? 4. В группе 16 юношей и 12 девушек. Для уборки территории нужно 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами можно их выбрать со всех студентов группы?
8.	1. Сколько различных трехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 3, 4, 5 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр? 2. Сколько различных комбинаций по семь букв можно составить из букв слова «ОБРАЗЕЦ»? 3. В бригаде из 21 человека надо выделить шесть человек для работы в саду. Сколькими способами это можно сделать? 4. Номера машин состоят из 3 букв русского алфавита (33 буквы) и 3 цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?
9.	1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 5, 6, 9, если каждая цифра может повторяться в числе? 2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по два? 3. Есть книги 6 видов. Сколькими способами можно составить наборы по 5 книг? (книги в наборе не повторяются) 4. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 и не более 6 человек?
10.	1. Из семи кандидатов требуется выбрать команду из четырех тренеров. Сколькими способами можно это сделать? 2. Сколько «слов», каждое из которых состоит из пяти различных букв можно составить из букв слова «ВЫСОТА»? 3. Сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 2, 5, 8, если цифры могут повторяться?

4. Сколькими способами можно выбрать 4 фигуры из 32 так, чтобы среди них было хотя бы 2 коня?

Порядок выполнения:

Задание 1. На полке стоит 15 книг по геометрии, 8 книг по алгебре, 7 книг по теории вероятности, 10 книг – худ. литература.

Найти, скольким числом способов можно выбрать книгу по математике.

Решение:

Математика: геометрия или алгебра, или теория вероятности.

Пр. Σ : $15 + 8 + 7 = 30$

Ответ: 30.

Задание 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 1, 0, при условии, что цифры могут повторяться.

Решение:

Число сотен – 2, десятков – 3, единиц – 3.

Пр. Π : $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18 чисел.

Задание 3. Сколько различных хорд можно провести через 6 точек, лежащие на окружности.

Решение: Определим сначала характер выборки:

1) неупоряд.

2) без повторений

Это сочетания без повторений.

$m=2, n=6$.

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! 4!} = 15$$

Задание 4. Сколько различных перестановок можно произвести в слове «колобок».

Решение: Определим сначала характер выборки:

1) упоряд.

2) с повторениями

Это перестановка с повторениями.

$m=7, n=4$.

$x = \{к, о, л, б\}$.

о: $m_1=3$

к: $m_2=2$

б: $m_3=1$

л: $m_4=1$.

$$P_{m(m_1, m_2, \dots, m_k)} = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3! \cdot m_4!}$$

$$P_7(3, 2, 1, 1) = \frac{7!}{3! 2! 1! 1!} = 420$$

Задание 5. Сколько различных очередей можно составить из 8 человек?

Решение: Определим сначала характер выборки:

1) упоряд.

2) без повторений

Это перестановка без повторений.

$m=8, n=8$.

$$P_n = n!$$

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Задание 6. Сколько двухзначных чисел можно составить из нечетных цифр?

Решение: Определим сначала характер выборки:

1) упоряд.

2) с повторениями

Это размещение с повторениями.

$m=2, n=5, x = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$A_n^m = n^m$$

$$\tilde{A}_5^2 = 5^2 = 25.$$

Задание 7. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любым из 5 языков на любой другой.

(русский, английский, французский, немецкий, итальянский)

Решение: Определим сначала характер выборки:

1) упоряд.

2) без повторений

Это размещение без повторений.

$m=2, n=5, x = \{p, a, n, \phi, u\}$.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20.$$

Контрольные вопросы:

1. Определение комбинаторики;
2. Определение комбинаторная задача;
3. Суть основных принципов комбинаторики;
4. Основные соединения комбинаторики и их формулы.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Тема: Вычисление вероятностей по классической формуле с помощью основных теорем вероятностей и с помощью элементов комбинаторики

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по вычислению вероятностей по классической формуле, с помощью основных теорем.

знать:

- понятие классической вероятности;
- основные теоремы вероятностей.

уметь:

- применять классическое определение вероятности и формулы сложения и произведения событий.

Подготовка к работе:

- повторить что такое классическое определение вероятности;
- повторить основные способы вычисления вероятности.

Задания:***Вариант 1***

1. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова: «событие».

2. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры нечетные? Известно, что номер телефона не начинается с цифры ноль.

3. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 13 штук. Вынуты наудачу 3 лампы. Какова вероятность того, что, хотя бы две из них по 100 Вт?

Вариант 2

1. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова: «статистика».

2. Для проведения соревнования 16 волейбольных команд разбиты по жребию на две подгруппы (по восемь команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах;

3. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 жёлтых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что они все одного цвета?

Вариант 3

1. Из 20 сбербанков 9 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города хотя бы один?

2. При приеме партии изделий подвергается проверке половина изделий. Условие приемки – наличие брака в выборке менее 2%. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

3. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

Вариант 4

1. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются пять билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся только девушки?

2. У сборщика имеются 10 деталей, мало отличающихся от других, из них четыре – первого, по две – второго, третьего и четвертого видов. Какова вероятность того, что среди шести взятых одновременно деталей три окажутся первого вида, два – второго и одна – третьего?

3. На связке 5 ключей. К замку подходит только один ключ. Найти вероятность того, что потребуется не более двух попыток открыть замок, если опробованный ключ в дальнейших испытаниях не участвует.

Вариант 5

1. Среди 25 студентов, из которых 12 девушек, разыгрываются шесть билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся только юноши?

2. Найти вероятность того, что из 10 книг, расположенных в случайном порядке, 3 определенные книги окажутся рядом.

3. В магазине продаются 10 телевизоров, 3 из них имеют дефекты. Какова вероятность того, что посетитель купит телевизор, если для выбора телевизора без дефектов понадобится не более трех попыток?

Вариант 6

1. Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются пять билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся двое юношей и три девушки?

2. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует настройки, равна 0,3, второй – 0,75, третий – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены только один станок потребует настройки;

3. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не выкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

Вариант 7

1. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города 3 сбербанка?

2. На фирме работают 8 аудиторов, из которых 3 – высокой квалификации, и 5 программистов, из которых 2 – высокой квалификации. В командировку надо отправить группу из 3 аудиторов и 2 программистов. Какова вероятность того, что в этой группе окажется по крайней мере 1 аудитор высокой квалификации и хотя бы 1 программист высокой квалификации, если каждый специалист имеет равные возможности поехать в командировку?

3. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлено отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен плохо.

Вариант 8

1. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?

2. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его не знает. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет;

3. На полке стоят 10 книг, среди которых 3 книги по теории вероятностей. Наудачу берутся три книги. Какова вероятность, что среди отобранных хотя бы одна книга по теории вероятностей?

Вариант 9

1. Из ящика, содержащего 5 пар обуви, из которых три пары мужской, а две пары женской обуви, перекладывают наудачу 2 пары обуви в другой ящик, содержащий одинаковое количество пар женской и мужской обуви. Какова вероятность того, что во втором ящике после этого окажется одинаковое количество пар мужской и женской обуви?

2. Среди 15 лампочек 4 стандартные. Одновременно берут наудачу 2 лампочки. Найти вероятность того, что, хотя бы одна из них нестандартная.

3. Батарея, состоящая из 3 орудий, ведет огонь по группе, состоящей из 5 самолетов. Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все орудия будут стрелять по одной и той же цели.

Вариант 10

1. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется не менее 3 импортных телевизоров, предполагается, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы.

2. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 13 штук. Вынуты наудачу 3 лампы. Какова вероятность того, что они одинаковой мощности?

3. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 2 подготовлено отлично, 4 – хорошо, 3 – посредственно и 1 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответит на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен хорошо.

Порядок выполнения:

Пример 1. В ящике находится 10 деталей: 8 стандартных и 2 нестандартных. Наудачу вынимаем одну деталь. Какова вероятность того, что вынутая деталь будет стандартной?

Решение:

Испытание: наудачу выбирается одна деталь.

Соб. А: вынули стандартную деталь.

$$n = 10, m = 8$$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Пример 2. Согласно прогнозу метеорологов, вероятность того, что будет дождь равна 0,4; вероятность того, что будет ветер равна 0,7; вероятность того, что будет и дождь, и ветер равна 0,2. Какова вероятность того, что будет дождь или ветер?

Решение:

Испытание: прогноз погоды

Соб. А: будет дождь;

Соб. В: будет ветер;

Соб. (АВ): будет и дождь, и ветер;

Соб. (А + В): будет дождь или ветер.

Т.к. события А и В совместны, следовательно, по теореме сложения вероятностей $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,4 + 0,7 - 0,2 = 0,9$

Пример 3. В урне находится 2 белых и 1 черный шар. Два человека вытаскивают по очереди по одному шару. Какова вероятность того, что оба вынули белые шары.

Решение:

Испытание: вынимаем по одному шару из трех

Соб. А: первый вытащил белый шар.

Соб. В: второй вытащил белый шар.

Т.к. первый вынул 1 шар из 3 (где 2 белых), а второй вынул 1 шар из оставшихся 2-х (где 1 белый), следовательно,

$$P(A) = \frac{2}{3} \qquad P_A(B) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Т.к. события А и В зависимы, то } P(AB) = P(A) * P_A(B) = \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Пример 4. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что, хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Решение:

Испытание: стрельба по мишени

Соб. А: первый стрелок попал в мишень;

Соб. В: второй стрелок попал в мишень.

$$P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,6$$

Тогда вероятности противоположных событий будут:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,4$$

Соб. С: Хотя бы один из стрелков попал в мишень

$$C = A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} + A \cdot B$$

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(C) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(B) \cdot P(\bar{A}) + P(A) \cdot P(B)$$

$$P(C) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,6 = 0,92$$

Ответ: $P(C) = 0,92$

Пример 5. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий 2 вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

Решение:

Испытание: ответы на экзаменационные вопросы

Соб. А - вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им билетов

Воспользуемся классическим определением вероятности события, согласно которому вероятность определяется по формуле: $P(A) = \frac{m}{n}$

где m – число исходов, при которых появляется событие А,
 n – общее число элементарных несовместных равновозможных исходов.

1) Определим n . Общее число билетов определяется сочетанием по 2 из 60:

$$n = C_{60}^2 = \frac{60!}{2! \cdot (60 - 2)!} = \frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$$

2) Количество билетов, вопросы которых студент знает, определяется сочетанием по 2 из 50:

$$m = C_{50}^2 = \frac{50!}{2! \cdot (50 - 2)!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$$

3) Определим вероятность события А:

$$P(A) = \frac{1225}{1770} = 0,69$$

Ответ: $P(A) = 0,69$.

Контрольные вопросы:

1. Классическое определение вероятности;
2. Сформулировать основные теоремы вероятностей.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: Вычисление вероятности по формуле полной вероятности и по формулам гипотез Байеса.

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по вычислению вероятности по формуле полной вероятности и по формулам Байеса.

знать:

- понятие полной вероятности;
- формулу полной вероятности;
- формулы гипотез Байеса.

уметь:

- применять формулу полной вероятности и формулы Байеса.

Подготовка к работе:

1. Повторить что такое полная вероятность.
2. Формула полной вероятности.
3. Формулы гипотез Байеса.

Задания:**Вариант 1**

1. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования?
2. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,4. В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит второму стрелку.

Вариант 2

1. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс – малый риск, II класс – средний, III класс – большой риск. Среди этих клиентов 50%

– первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,08. Какова вероятность того, что получивший денежное вознаграждение застрахованный относится к группе малого риска?

2. На первом заводе на каждые 100 лампочек производится в среднем 80 стандартных, на втором – 90, на третьем – 85, а продукция этих заводов составляет соответственно 45%, 30% и 25% всех электролампочек, поставляемых в магазины некоторого района. Найти вероятность приобретения нестандартной электролампочки.

Вариант 3

1. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что приобретенное изделие окажется нестандартным.

2. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 45% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.

Вариант 4

1. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 6:4:5. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 87%, второй – 80%, третьей – 84%. Найти вероятность того, что приобретенное изделие оказалось стандартным.

2. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,3. В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

Вариант 5

1. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой?

2. В компьютерном классе установлены пять ноутбуков, изготовленных компанией «А», шесть – компанией «В», три – компанией «С» и два – компанией «D». Гарантия, что ноутбуки этих компаний будут работать соответственно составляют 0,65; 0,75; 0,85 и 0,55. Найти вероятность того, что выбранный ноутбук бу-

дет работать без ремонта в течении гарантийного срока.

Вариант 6

1. В группе спортсменов лыжников в 2 раза больше, чем бегунов, а бегунов в 3 раза больше, чем велосипедистов. Вероятность выполнить норму для лыжника 0,7, для бегуна 0,85, для велосипедиста - 0,6. Какова вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму?

2. В учреждении два секретаря готовят копии документов. Первый секретарь обрабатывает 65% всех форм, второй – остальные. У первого секретаря удельный вес ошибок составляет 0,04, у второго – 0,05. В конце дня, выбрав случайно один из подготовленных документов, руководитель выяснил, что в нём нет ошибки. Какова вероятность, что этот документ готовил второй секретарь?

Вариант 7

1. В клубе числится 25 стрелков. В первой группе 13 попадают в цель с вероятностью 0,6, во второй 7 - с вероятностью 0,5 и в третьей 5 – с вероятностью 0,8. Случайно выбранный стрелок произвел выстрел и поразил цель. Какова вероятность того, что стрелок относится ко второй группе?

2. Из 55 деталей 15 изготовлены в первом цехе, 28 - во втором, а остальные - в третьем. Первый и второй цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью 0.85, а третий цех - с вероятностью 0.7. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Вариант 8

1. В магазине три холодильника в которых есть мороженное. В первом 7 белых и 8 шоколадных, во втором - 4 белых и 12 шоколадных, в третьем – 8 белых и 9 шоколадных. Наугад выбрали холодильник и вынимают из него мороженное. Какова вероятность, что оно шоколадное?

2. Два автомата производят детали. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0,75, вторым - 0,8. Производительность первого автомата втрое выше производительности второго. Рабочий взял наугад деталь, и она оказалась стандартной. Какова вероятность, что эта деталь изготовлена вторым автоматом?

Вариант 9

1. В первой и в третьей группах одинаковое число студентов, а во второй – в 2 раза меньше, чем в первой. Количество отличников составляет 7% в первой, 5% во второй и 6% в третьей группе. Случайным образом вызывают одного студента. Какова вероятность того, что случайно вызванный студент – отличник?

2. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,03, второй – 0,01. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось первым контролером.

Вариант 10

1. Предприятие, производящее компьютеры, получает одинаковые комплектующие детали от трех поставщиков. Первый поставляет 50 % всех комплектующих деталей, второй - 20%, третий - 30% деталей.

Известно, что качество поставляемых деталей разное, и в продукции первого поставщика процент брака составляет 4 %, второго - 5 %, третьего - 2 %. Определить вероятность того, что деталь, выбранная наудачу из всех полученных, будет бракованной.

2. В учреждении три секретаря готовят копии документов. Первый секретарь обрабатывает 40% всех форм, второй – 25%, третий – 35%. У первого секретаря удельный вес ошибок составляет 0,02, у второго – 0,04, у третьего – 0,05. В конце дня, выбрав случайно один из подготовленных документов, руководитель выяснил, что в нём есть ошибка. Какова вероятность, что ошибку допустил первый секретарь?

Порядок выполнения:

Пример 1. Имеется 3 урны. В первой урне находятся 5 черных и 3 белых шара, во второй – 4 черных и 4 белых шара, а в третьей – 8 белых шаров. Наугад выбирается одна из урн, а затем из нее наудачу выбирается 1 шар. Найти вероятность того, что появился черный шар.

Решение: Испытание: сначала наудачу выбирается урна, а потом из нее выбираем шар.

Соб. H_1 : выбрана 1-ая урна;

Соб. H_2 : выбрана вторая 2-ая урна;

Соб. H_3 : выбрана 3-ая урна.

$$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad P(H_2) = \frac{1}{3} \quad P(H_3) = \frac{1}{3} \quad \text{Проверка: } \sum_{i=1}^3 P(H_i) = 1$$

Соб. A : появился черный шар.

$$P_{H_1}(A) = \frac{5}{8} \quad P_{H_2}(A) = \frac{1}{2} \quad P_{H_3}(A) = 0, \text{ тогда}$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{3}{8}.$$

Пример 2. Имеется две урны. В первой 5 шаров, из них 3 белых. Во второй - 7 белых и 3 черных. Сначала наудачу выбирают урну, а затем из вынимается один шар. Какова вероятность того, что шар вынули из первой урны?

Решение: Испытание: Сначала выбирается урна, а затем шар.

Соб. H_1 : выбрали первую урну;

Соб. H_2 : выбрали вторую урну;

$$P(H_1) = \frac{1}{2} \quad P(H_2) = \frac{1}{2}, \text{ причем } \sum_{i=1}^2 P(H_i) = 1$$

Соб. A : появился белый шар.

$$P_{H_1}(A) = \frac{3}{5}, \quad P_{H_2}(A) = \frac{7}{10},$$

Найдем вероятность того, что белый шар вынули из первой урны.

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10}} = \frac{6}{13}$$

Контрольные вопросы:

1. Определение полной вероятности;
2. Формула полной вероятности;
3. Формула гипотез Байеса.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: Вычисление вероятности с помощью схемы Бернулли

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по вычислению вероятности по схеме Бернулли.

знать:

- формулу Бернулли;
- формулу Пуассона;
- интегральную и локальную формулы Лапласа.
- понятие наивероятнейшего числа.

уметь:

- применять формулу Бернулли, формулу Пуассона, интегральную и
- локальную формулы Лапласа, формулу вычисления наивероятнейшего числа.

Подготовка к работе:

1. Повторить, что такое наивероятнейшее число.
2. Формулу Бернулли;
3. Формулу Пуассона;
4. Интегральную и локальную формулы Лапласа.

Задания:***Вариант 1***

1. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из 7 малых предприятий за время t сохранятся: а) три; б) более четырех.
2. Предполагается, что 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из восьмидесяти четырех малых предприятий не более восемнадцати в течение года прекратят свою деятельность?

Вариант 2

1. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди девяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) менее пяти.
2. В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день, рождения студента приходится на определенный день года, равна $1/365$. Найти: а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 мая, и вероятность такого события; б) вероятность того, что по крайней мере 3 студента имеют один и тот же день рождения.

Вариант 3

1. Известно, что в среднем 60% всего числа изготавливаемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется:
а) 5 аппаратов первого сорта, если партия содержит 8 аппаратов;
б) 120 аппаратов первого сорта, если партия содержит 200 аппаратов?

2. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

Вариант 4

1. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из девяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы:

- а) четыре договора;
- б) менее двух договоров.

2. Производится залп из двадцати орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее восьми попаданий.

Вариант 5

1. В семье семь детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными между собой, определить вероятность того, что в данной семье:

- а) пять мальчиков;
- б) не более трех девочек.

2. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 48, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,15?

Вариант 6

1. Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно:

- а) выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6;
 - б) не менее 2 партий из 6 или не менее 3 партий из 6?
- (ничьи в расчет не принимаются.)

2. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 2100 банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб.:

- а) не менее 360;
- б) от 300 до 400 включительно.

Вариант 7

1. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0002. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено:

- а) четыре ошибочно укомплектованных пакета;

б) не более трех пакетов.

2. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 64% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполняют 180 студентов.

Вариант 8

1. Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Препрежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листов число заказов будет:

а) равно 113;

б) находиться в границах от 45 до 55.

2. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 57% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполняют не менее 268 студентов.

Вариант 9

1. Учебник издан тиражом 12 000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что:

а) тираж содержит 8 бракованных книг;

б) по крайней мере 11997 книг сброшюрованы правильно.

2. Вероятность того, что перфокарта набита оператором неверно, равна 0,1. Найти вероятность того, что из 240 перфокарт, правильно набитых будет не меньше 209.

Вариант 10

1. Вероятность всхожести семян в среднем составляет 79%.

а) найти вероятность того, что из 2400 семян взойдут 2178;

б) наиболее вероятное число взошедших семян из 340.

2. Вероятность того, что перфокарта набита оператором неверно, равна 0,13. Найти вероятность того, что у того же оператора из восьми перфокарт, будет неверно набитых не более трех.

Порядок выполнения:

Пример 1. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,02. Чему равна для владельца четырех билетов вероятность выигрыша: а) по трем билетам; б) не более двух билетов; в) хотя бы по одному билету.

Решение:

Данные задачи $n=4$; $p=0,02$; $q=1-p=0,98$.

а) задача I типа

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = P_4(3) = C_4^3 (0,02)^3 (0,98)^1 = 3 \cdot 10^{-5}$$

б) задача II типа

$$\begin{aligned} P_n(m_1 \leq m \leq m_2) &= \sum_{m=0}^2 P_4(m) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = \\ &= C_4^0 (0,02)^0 (0,98)^4 + C_4^1 (0,02)^1 (0,98)^3 + C_4^2 (0,02)^2 (0,98)^2 = 0,099; \end{aligned}$$

$$в) P_n(m \geq 1) = 1 - q^n = P_4(m \geq 1) = 1 - (0,98)^4 = 0,078.$$

Пример 2. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 90%. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 100 изделий — высшего сорта окажется 84 изделия.

Решение.

Данные задачи $n=100$; $p=0,9$; $q=1-p=0,1$; $m=84$; $np=90 > 10$

задача I типа

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}; \text{ т.е.}$$

$$P_{100}(84) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{84-90}{\sqrt{100 \cdot 0,9 \cdot 0,1}};$$

$$P_{100}(84) = \frac{1}{3} \cdot \varphi(-2) = \frac{1}{3} \cdot \varphi(2) = \frac{1}{3} \cdot 0,054 = 0,018.$$

Пример 3. Доля изделий высшего сорта продукции составляет 80%. Найти вероятность того, что в партии из 900 изделий высшего сорта будет заключено между 700 и 750.

Решение.

Данные задачи $n=900$; $p=0,8$; $q=1-p=0,2$; $np=720$, $m_1 = 700$, $m_2 = 750$,

задача II типа

$$\sqrt{npq} = \sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 12.$$

$$\begin{aligned} P_n(700 \leq m \leq 750) &= \Phi\left(\frac{750-720}{12}\right) - \Phi\left(\frac{700-720}{12}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{5}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = \Phi(2,5) + \Phi(1,666) = 0,4938 + 0,4521 = 0,9459. \end{aligned}$$

Пример 4. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) меньше двух.

Решение.

Данные задачи: $n=1000$; $p=0,003$ — мала, $\lambda = 1000 \cdot 0,003 = 3$.

а) задача I типа

$$P_n(m) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{m!} = P_{1000}(2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 0,224,$$

б) задача II типа

$$P_{1000}(m < 2) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) = \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3 \cdot e^{-3}}{1!} = \\ = 0,0498 + 0,1494 = 0,1992.$$

Пример 5. Предприятие поставяет свою продукцию 15 магазинам, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,6 независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок.

Решение.

Данные задачи: $n=15$, $p=0,6$; $q=0,4$.

задача III типа

$$np - q \leq m_0 \leq np + q$$

$$15 \cdot 0,6 - 0,4 \leq m_0 \leq 15 \cdot 0,6 + 0,6, \quad 8,6 \leq m_0 \leq 9,6.$$

Следовательно, $m_0 = 9$.

Контрольные вопросы:

1. Формула Бернулли.
2. Формула Пуассона.
3. Интегральная и локальная формулы Лапласа.
4. Определение наивероятнейшего числа.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: Составление функции распределения дискретной случайной величины. Нахождение числовых характеристик ДСВ.

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по составлению функции распределения дискретной случайной величины и вычислению числовых характеристик ДСВ.

знать:

- понятие дискретной случайной величины;
- понятие функции распределения ДСВ;
- свойства функции распределения ДСВ

– формулы числовых характеристик

уметь:

– применять определение и свойства функции распределения ДСВ к составлению функции распределения.

Подготовка к работе:

1. Повторить что такое дискретная случайная величина;
2. Повторить что такое функции распределения ДСВ;
3. Повторить Свойства функции распределения ДСВ.

Задание:

- 1) составить функции распределения заданных дискретных случайных величин и построить их графики;
- 2) найти числовые характеристики для каждой ДСВ.

Вариант 1

Заданы ДСВ X и Y .

X :

x_i	2	4	8	10
p_i	0,4	0,2	0,1	

Y :

y_i	1	2	3	4
q_i	0,1	0,5		0,2

Вариант 2

Заданы ДСВ X и Z .

X :

x_i	4	8	10
p_i		0,4	0,1

Z :

z_i	1	3	5	7	9
q_i	0,1		0,2	1/10	1/5

Вариант 3

Заданы ДСВ Y и Z .

Y :

y_i	1	2	3	7
p_i	0,3		0,1	0,2

Z :

z_i	3	6	7	9
q_i	0,3	0,4		0,1

Вариант 4

Заданы ДСВ X и Y.

X:

x_i	3	4	6	8
p_i	0,1	0,5	0,2	

Y:

y_i	3	2	1	0
q_i	0,4	0,3		0,1

Вариант 5

Заданы ДСВ X и Y.

X:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4		0,08	0,02

Y:

y_i	3	4	7
q_i	0,3		0,5

Вариант 6

Заданы ДСВ X и Y.

X:

x_i	3	4	7	10
p_i	0,4	0,2	0,1	

Y:

y_i	1	2	3	4
q_i	0,1	0,3		0,2

Вариант 7

Заданы ДСВ X и Z.

X:

x_i	2	4	5	8
p_i	0,4	0,3		0,2

Z:

z_i	1	4	7	8
q_i		0,2	0,1	1/5

Вариант 8

Заданы независимые СВ Y и Z.

Y:

y_i	2	3	4	7	9
p_i		0,2	0,3	0,1	0,2

Z:

z_i	4	6	7
q_i	0,3	0,4	

Вариант 9

Заданы ДСВ X и Y.

X:

x_i	4	7	10	12
p_i	0,3		0,2	0,1

Y:

y_i	2	4	8	9
q_i	0,3	0,3		0,1

Вариант 10

Заданы ДСВ X и Y.

X:

x_i	0	1	2	4	5
p_i	0,2	0,3		0,04	0,26

Y:

y_i	4	5	7
q_i	0,4	0,1	

Порядок выполнения:

Задание: Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	1	4	8
p_i	0,3		0,8

Найти:

А) $p(X = 4)$

Б) функцию распределения и построить ее график.

Решение:

А) т.к. $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то $p(X = 4) = 1 - (p(X = 1) + p(X = 8)) = 1 - (0,3 + 0,6) = 0,1$

Тогда, закон распределения ДСВ X имеет вид:

x_i	1	4	8
p_i	0,3	0,1	0,6

Б) Найдем функцию распределения $F(X)$.

$$F(x) = P(X < x)$$

Используем третье свойство.

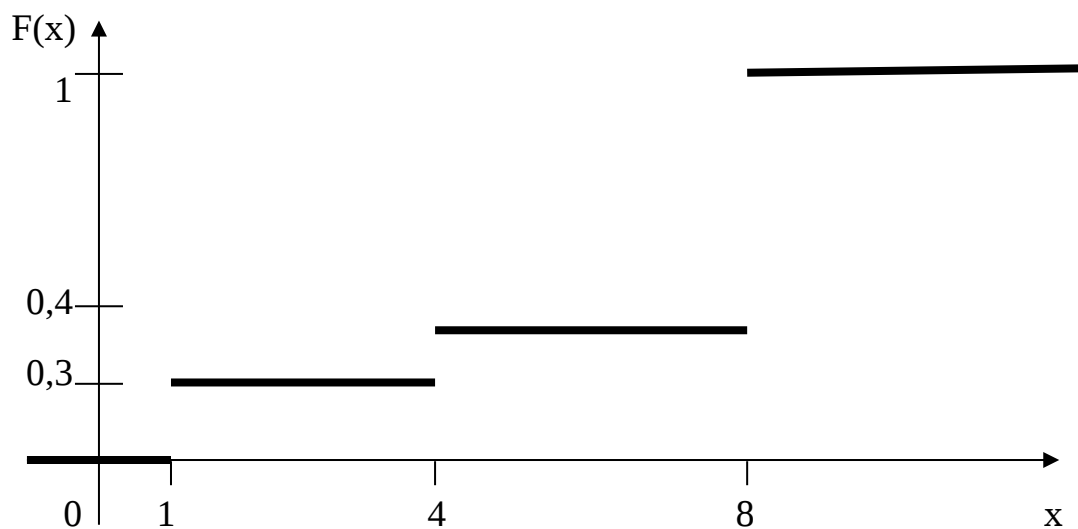
при $x \leq 1$, $F(x) = 0$;

при $1 < x \leq 4$, $F(x) = 0,3$

при $4 < x \leq 8$, $F(x) = p(X = 1) + p(X = 4) = 0,3 + 0,1 = 0,4$

при $x \geq 8$, $F(x) = p(X = 1) + p(X = 4) + p(X = 8) = 0,3 + 0,1 + 0,6 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,3 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 0,4 & \text{при } 4 < x \leq 8, \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$



В) Определим числовые характеристики ДСВ X.

Математическое ожидание: $M(X) = \sum x_i \cdot p_i$

$$M(X) = 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,6 = 5,5$$

Дисперсия: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \sum x_i^2 \cdot p_i$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,1 + 8^2 \cdot 0,6 = 40,3$$

$$D(X) = 40,3 - 5,5^2 = 10,05$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

$$\sigma(X) = \sqrt{10,05} = 3,17$$

Контрольные вопросы:

1. Определение дискретной случайной величины;
2. Определение функции распределения ДСВ;
3. Сформулировать свойства функции распределения ДСВ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

Тема: Вычисление числовых характеристик непрерывной случайной величины

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по нахождению функции распределения непрерывной случайной величины и по вычислению числовых характеристик непрерывной случайной величины.

знать:

- понятие непрерывной случайной величины;
- формулу для нахождения функций распределения по известной плотности распределения НСВ.
- понятия математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения НСВ.
- формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения НСВ.

уметь:

- применять формулы по нахождению функции распределения по известной плотности распределения НСВ.
- применять формулы по вычислению числовых характеристик к данным непрерывным случайным величинам.

Подготовка к работе:

1. Повторить что такое непрерывная случайная величина;
2. Повторить что функция распределения НСВ;
3. Повторить что плотность распределения НСВ;
4. Повторить формулу для нахождения функции распределения по известной плотности распределения НСВ.
5. Повторить формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения НСВ;

6. Повторить формулы для вычисления математического ожидания дисперсии, среднее квадратическое отклонение НСВ

Задания:

Задание 1. Задана непрерывная случайная величина X плотностью распределения. Найти функцию распределения. Построить графики функции распределения и плотности распределения.

Вариант	Функция плотности	Вариант	Функция плотности
1	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{1}{2} \\ 2, & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}$	6	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 2x, & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{при } x > 1 \end{cases}$
2	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ x, & \text{при } 2 < x \leq 4 \\ 0, & \text{при } x > 4 \end{cases}$	7	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{при } 0 < x \leq 4 \\ 0, & \text{при } x > 4 \end{cases}$
3	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{5}{3} \\ 3, & \text{при } \frac{5}{3} < x \leq 3 \\ 0, & \text{при } x > 3 \end{cases}$	8	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{3x^2}{8}, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ 9x^2, & \text{при } 1 < x \leq 4 \\ 0, & \text{при } x > 4 \end{cases}$	9	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3/2 \\ 2, & \text{при } \frac{3}{2} < x \leq 2 \\ 0, & \text{при } x > 2 \end{cases}$
5	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2, & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 0, & \text{при } x > 3 \end{cases}$	10	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{x}{2}, & \text{при } 2 < x \leq 6 \\ 0, & \text{при } x > 6 \end{cases}$

Задание 2. Задана функция распределения НСВ X .

- Найти:
- а) плотность распределения $f(X)$
 - б) построить графики $f(x)$ и $F(x)$
 - в) $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$,
 - г) $P(x_1 \leq x \leq x_2)$ – двумя способами.

вари- ант	Функция распределения	Интервал
1	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4}, & \text{при } 2 < x \leq 6 \\ 1, & \text{при } x > 6 \end{cases}$	$x_1 = 3$ $x_2 = 5$
2	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3, & \text{при } \frac{3}{2} < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$	$x_1 = 1$ $x_2 = 2$
3	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{8}, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$	$x_1 = 1$ $x_2 = 3$
4	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & \text{при } 0 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$	$x_1 = 2$ $x_2 = 4$
5	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 2x^2, & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$	$x_1 = 0.5$ $x_2 = 2$
6	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{3}, & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$	$x_1 = 1$ $x_2 = 3$
7	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1 \\ 3x^3, & \text{при } 1 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$	$x_1 = 2$ $x_2 = 4$
8	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{5}{3} \\ 3x - 5, & \text{при } \frac{5}{3} < x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$	$x_1 = 1$ $x_2 = 3$

9	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2}, & \text{при } 2 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$
10	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$	$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$

Порядок выполнения:

Пример 1: Задана плотность непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить их графики.

Решение. Используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$.

Если $x \leq 1$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = 0$.

Если $1 < x \leq 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^x (x - 0,5)dx = \frac{1}{2}(x^2 - x)$.

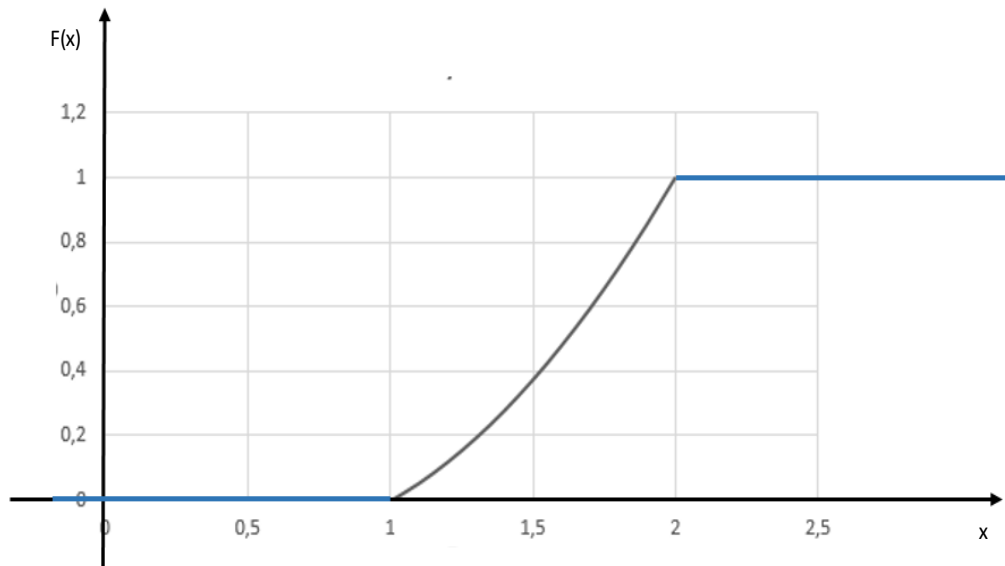
Если $x > 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^2 (x - 0,5)dx + \int_2^x 0dx = 0 + \frac{1}{2}(x^2 - x) \Big|_1^2 + 0 = 1$

.

Итак, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ 0,5(x^2 - x), & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

График этой функции распределения:



Пример 2. Задана непрерывная случайная величина X функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) функцию плотности $f(x)$

б) Построить графики $f(x)$ и $F(x)$

в) $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$,

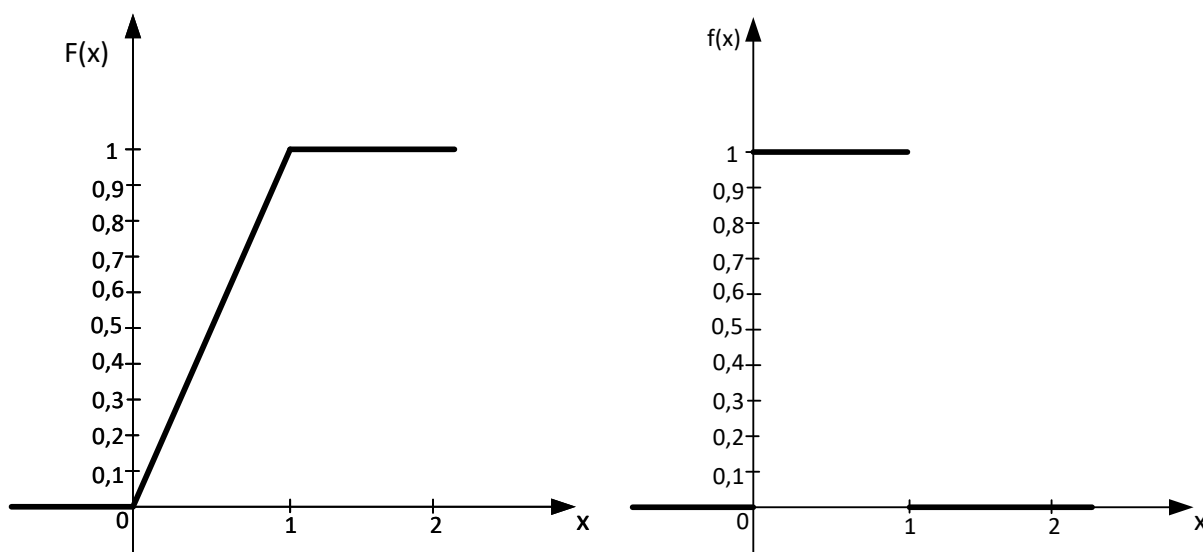
г) $P(x_1 \leq x \leq x_2)$ – двумя способами, если $x_1 = 0,5, x_2 = 2$

Решение:

а) Найдем плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

б) Построим графики $F(x)$ и $f(x)$:



в) Найдем математическое ожидание по формуле:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Найдем дисперсию по формуле:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx - \left[\frac{1}{2} \right]^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = 0.29$

г) Первый способ: $P(0.5 \leq x \leq 2) = F(2) - F(0.5) = 1 - 0.5 = 0.5$.

Второй способ: $P(0.5 \leq x \leq 2) = \int_{0.5}^2 f(x) dx = \int_{0.5}^1 1 dx + \int_1^2 0 dx = 1 - 0.5 = 0.5$

Контрольные вопросы:

1. Определение непрерывной случайной величины;
2. Определение функции распределения НСВ;
3. Определения плотности распределения НСВ;
4. Формула для нахождения функции распределения по известной плотности распределения НСВ.

5. Определения математического ожидания НСВ, дисперсия НСВ, среднего квадратического отклонения НСВ.

6. Формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения НСВ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

Тема: Вычисление числовых характеристик и вероятностей попадания непрерывной случайной величины для равномерного, нормального и показательного распределения

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по вычислению числовых характеристик и вероятностей попадания непрерывной случайной величины для равномерного, нормального и показательного распределения

знать:

- понятие непрерывной случайной величины (НСВ);
- понятие математического ожидания НСВ, дисперсии НСВ, среднего квадратического отклонения НСВ для равномерного, нормального и показательного распределения;
- формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения НСВ для равномерного, нормального и показательного распределения.
- формулы для вычисления вероятностей непрерывной случайной величины в заданный интервал

уметь:

- применять формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии среднего квадратического отклонения НСВ для равномерного, нормального и показательного распределения.
- применять формулы для вычисления вероятностей непрерывной случайной величины в заданный интервал.

Подготовка к работе:

1. Повторить что такое непрерывная случайная величина.
2. Повторить что такое математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение НСВ;
3. Повторить формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения НСВ для равномерного, нормального и показательного распределения.

4. Повторить формулы для вычисления вероятностей непрерывной случайной величины в заданный интервал.

Задания:

Задание №1. Задана непрерывная случайная величина X по равномерному закону распределения.

Найти: а) $F(x)$, $f(X)$;
 б) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;
 в) $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Вариант	Интервал (a,b)	Вариант	Интервал (a,b)
1	a=30 b=50	6	a=1 b=4
2	a=1 b=2	7	a=3 b=4
3	a=1 b=3	8	a=1 b=6
4	a=2 b=4	9	a=1 b=7
5	a=1 b=5	10	a=2 b=6

Задание №2. Задана непрерывная случайная величина X по нормальному закону распределения.

Найти: а) $f(X)$,
 б) построить графики $f(x)$,
 в) $P(x_1 \leq x \leq x_2)$

Вариант	Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормального распределения	Интервал
1	a= $M(X)$ = 2 $\sigma = \sigma(X)$ = 4	$x_1 = 1$ $x_2 = 3$
2	a= $M(X)$ =10 $\sigma = \sigma(X)$ = 30	$x_1 = 15$ $x_2 = 35$
3	a= $M(X)$ =20 $\sigma = \sigma(X)$ = 50	$x_1 = 10$ $x_2 = 40$

4	$a=M(X)=2$ $\sigma = \sigma(X) = 7$	$x_1 = 1$ $x_2 = 6$
5	$a=M(X)=10$ $\sigma = \sigma(X) = 40$	$x_1 = 15$ $x_2 = 25$
6	$a=M(X)=20$ $\sigma = \sigma(X) = 30$	$x_1 = 10$ $x_2 = 40$
7	$a=M(X)=1$ $\sigma = \sigma(X) = 5$	$x_1 = 2$ $x_2 = 6$
8	$a=M(X)=30$ $\sigma = \sigma(X) = 70$	$x_1 = 20$ $x_2 = 50$
9	$a=M(X)=25$ $\sigma = \sigma(X) = 35$	$x_1 = 20$ $x_2 = 40$
10	$a=M(X)=15$ $\sigma = \sigma(X) = 35$	$x_1 = 10$ $x_2 = 30$

Задание №3. Задана непрерывная случайная величина X по показательному закону распределения.

Найти: а) $F(x)$, $f(X)$;

б) $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$;

в) $P(x_1 \leq x \leq x_2)$.

Вариант	Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормального распределения	Интервал
1	$\lambda = 4$	$x_1 = 1$ $x_2 = 3$
2	$\lambda = 5$	$x_1 = 1$ $x_2 = 5$
3	$\lambda = 0,1$	$x_1 = 10$ $x_2 = 40$
4	$\lambda = 3$	$x_1 = 1$ $x_2 = 6$
5	$\lambda = 2$	$x_1 = 1$ $x_2 = 2$
6	$\lambda = 10$	$x_1 = 1$ $x_2 = 4$
7	$\lambda = 0,1$	$x_1 = 2$ $x_2 = 6$

8	$\lambda = 0,5$	$x_1 = 2$ $x_2 = 5$
9	$\lambda = 1,5$	$x_1 = 2$ $x_2 = 4$
10	$\lambda = 2,5$	$x_1 = 1,5$ $x_2 = 3,5$

Порядок выполнения:

Пример 1. Задана непрерывная случайная величина X по равномерному закону $a=3, b=5$.

Найти: а) $F(x), f(x)$; б) построить графики $f(x)$ и $F(x)$; в) $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Решение:

а) Найдем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{x-3}{2} & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найдем плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 0 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

б) График функции распределения:

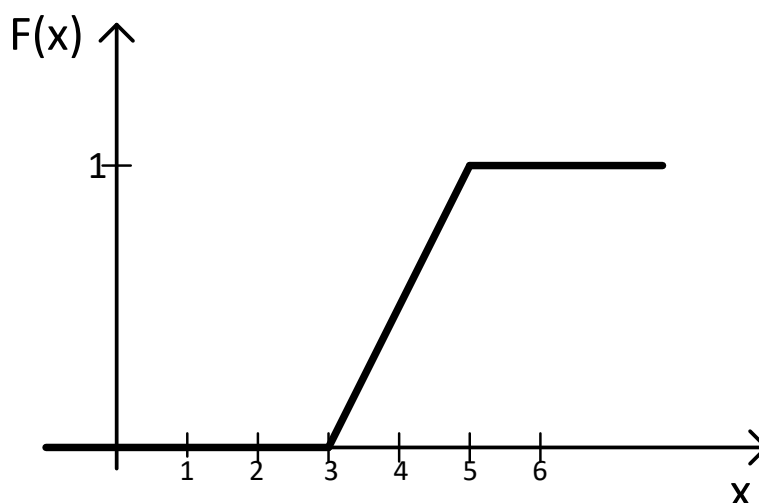
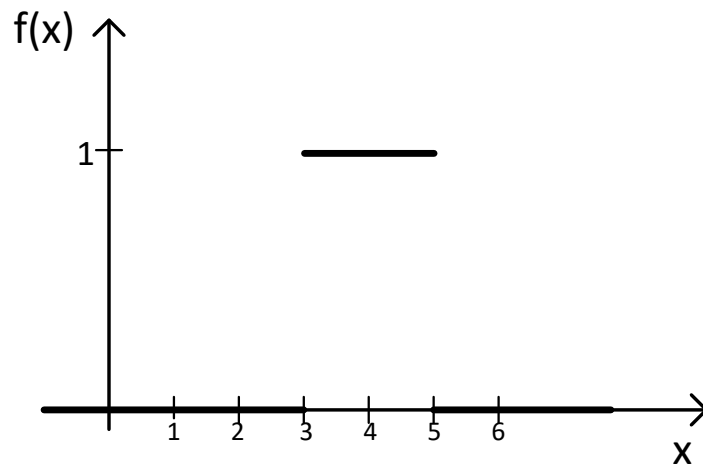


График плотности распределения:



в) Найдем математическое ожидание X по формуле, учитывая, что плотность равномерного распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx$$

Выполнив элементарные выкладки, получим

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

Найдем дисперсию X по формуле:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left[\frac{a+b}{2} \right]^2.$$

Выполнив элементарные выкладки получим

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Учитывая данные: $a=3$, $b=5$, получим

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{3+5}{2} = 4, \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-3)^2}{12} = \frac{1}{3}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример 2. Задана непрерывная случайная величина X по нормальному закону, $a=M(X)=1$, $\sigma = \sigma(X) = 3$; $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Найти: а) $f(X)$,

б) $P(x_1 < x < x_2)$

Решение:

а) Найдем функцию распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2 \cdot 3^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$$

б) Вероятность вычисляется по формуле:

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$$

где $\Phi(x)$ – Функция Лапласа,

$$t_1 = \frac{x_1-a}{\sigma} = \frac{1-1}{3} = 0, \quad t_2 = \frac{x_2-a}{\sigma} = \frac{2-1}{3} = 0,33$$

$$P(1 < x < 2) = \Phi(0,33) - \Phi(0) = 0,1293 - 0 = 0,1293$$

Пример 3. Задана непрерывная случайная величина X по показательному закону, $\lambda=8$ $x_1 = 1, x_2 = 3$,

Найти: а) $F(x)$, $f(X)$,

б) $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

в) $P(x_1 \leq x \leq x_2)$

Решение:

а) Напишем плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda=8$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 8e^{-8x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-8x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

б) $M(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{8}$; $D(x) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$, $\sigma(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{8}$

в) $P(1 \leq x \leq 3) = e^{-\lambda a} e^{-\lambda b} = e^{-8 \cdot 1} - e^{-8 \cdot 3} = e^{-8} - e^{-24}$

Контрольные вопросы:

1. Определение непрерывной случайной величины;
2. Определение математического ожидания НСВ;
3. Определение дисперсии НСВ;
4. Определение среднего квадратического отклонения НСВ;
5. Формулы для вычисления математического, ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения НСВ для равномерного, нормального и показательного распределения.
6. Формулы для вычисления вероятностей непрерывной величины в заданный интервал

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: Построение полигонов и гистограмм частот и относительных частот. Вычисление средней генеральной и выборочной, дисперсии.

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по построению полигонов и гистограмм частот и относительных частот и по статическим оценкам параметров распределения и точечных оценок.

знать:

- понятие полигона частот и относительных частот;
- понятие гистограммы частот и относительных частот.
- понятие статистических оценок параметров распределения;
- понятие выборочной и генеральной средней;
- понятие выборочной и генеральной дисперсии.

уметь:

- составлять распределения относительных частот;
- строить полигоны и гистограммы частот и относительных частот
- вычислять выборочную среднюю и дисперсию;

Подготовка к работе:

1. Понятие выборки;
2. Понятие частоты, относительной частоты;
3. Понятие полигона частот и относительных частот;
4. Понятие гистограммы частот и относительных частот и процесс построения;
5. Повторить что такое выборочная и генеральная средняя;
6. Повторить что такое выборочная и генеральная дисперсия.

Задание №1: Выборка задана в виде распределения частот. Найти распределение относительных частот.

Вариант 1

xi	2	5	7
n _j	1	3	6

Вариант 2

xi	4	7	8	12
n _j	5	2	3	10

Вариант 3

xi	1	2	3
n _j	5	6	4

Вариант 4

xi	2	4	6	8
n _j	2	6	10	2

Вариант 5

xi	2	4	6
n _j	5	8	7

Вариант 6

xi	5	8	9	12
n _j	2	6	9	15

Вариант 7

xi	3	6	9
n _j	1	5	8

Вариант 8

xi	3	7	10	14
n _j	3	6	10	12

Вариант 9

xi	1	4	8
n _j	2	6	8

Вариант 10

xi	2	5	8	10
n _j	3	7	9	10

Задание №2: Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки.

Вариант 1

xi	2	5	7	8
n _j	1	3	2	4

Вариант 2

xi	4	7	8	10
n _j	5	2	3	1

Вариант 3

xi	2	4	6	8
n _j	5	6	10	2

Вариант 4

xi	2	4	7	10
n _j	5	2	9	12

Вариант 5

xi	5	8	9	12
n _j	1	5	8	15

Вариант 6

xi	3	5	6	9
n _j	2	3	4	9

Вариант 7

xi	3	7	10	14
n _j	2	5	9	12

Вариант 8

xi	1	5	8	9
n _j	3	7	4	8

Вариант 9

xi	2	5	8	10
n _j	2	8	9	10

Вариант 10

xi	1	4	6	8
n _j	6	5	4	9

Задание № 3: Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки.

Вариант 1

x_i	2	4	5	7	10
w_j	0,15	0,2	0,1	0,45	

Вариант 2

x_i	1	4	5	8	9
n_j	0,15	0,25		0,2	0,1

Вариант 3

x_i	1	2	3	4	5
w_j	0,1	0,3	0,15		0,2

Вариант 4

x_i	2	4	6	8	10
w_j	0,1		0,3	0,2	0,3

Вариант 5

x_i	2	3	5	7	9
w_j	0,2	0,25		0,1	0,2

Вариант 6

X_i	3	4	6	8	9
w_j	0,3		0,15	0,25	0,2

Вариант 7

X_i	1	3	5	7	9
w_j	0,1	0,13	0,27	0,4	

Вариант 8

X_i	5	6	7	8	9
w_j		0,25	0,2	0,35	0,05

Вариант 9

X_i	2	3	5	6	7
w_j	0,15		0,38	0,12	0,1

Вариант 10

X_i	1	4	5	6	7
w_j	0,4	0,1	0,2		0,1

Задания № 4: Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Вариант 1

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{ni}{h}$
1	2-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

Вариант 2

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{ni}{h}$
1	1-5	10	
2	5-9	20	
3	9-13	50	
4	13-17	12	
5	17-21	8	

Вариант 3

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{ni}{h}$
1	3-7	5	
2	7-11	10	
3	11-15	25	
4	15-19	6	
5	19-23	4	

Вариант 4

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{ni}{h}$
1	1-5	10	
2	5-9	20	
3	9-13	50	
4	13-17	12	
5	17-21	8	

Вариант 5

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{ni}{h}$
1	1-6	5	
2	6-11	10	
3	11-16	24	
4	16-21	5	
5	21-26	3	

Вариант 6

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{ni}{h}$
1	1-5	10	
2	5-9	20	
3	9-13	50	
4	13-17	12	
5	17-21	8	

Вариант 7

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{ni}{h}$
1	3-5	5	
2	5-9	10	
3	9-14	25	
4	14-20	6	
5	20-23	4	

Вариант 8

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{ni}{h}$
1	1-5	10	
2	5-9	20	
3	9-13	50	
4	13-17	12	
5	17-21	8	

Вариант 9

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	1-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

Вариант 10

Номер интервала	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот интервал	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	1-5	8	
2	5-9	15	
3	9-13	20	
4	13-17	12	
5	17-21	8	

Задание №5: Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию по данному распределению выборки

Вариант 1

x_i	1250	1270	1280	1290
n_i	2	5	7	3

Вариант 2

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

Вариант 3

x_i	186	194	201	206
n_i	2	5	3	8

Вариант 4

x_i	340	360	375	380
n_i	8	50	18	12

Вариант 5

xi	0,01	0,04	0,09	0,12
ni	5	3	6	2

Вариант 6

xi	0,1	0,5	0,6	0,8
ni	5	15	20	10

Вариант 7

xi	18,4	18,9	19,3	19,6
ni	5	10	20	15

Вариант 8

xi	102	104	108	111
ni	2	3	5	6

Вариант 9

xi	0,01	0,03	0,05	0,09
ni	2	4	3	5

Вариант 10

xi	0,1	0,5	0,7	0,9
ni	6	12	1	1

Порядок выполнения:

Пример №1: Задано распределение частот выборки объема $n=20$;

xi	2	6	12
ni	3	10	7

Составить распределение относительных частот.

Решение: Найдем относительные частоты, для этого разделим частоты на объем выборки:

$$W1 = \frac{3}{20} = 0,15; \quad W2 = \frac{10}{20} = 0,50; \quad W3 = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Напишем распределение относительных частот:

xi	2	6	12
wi	0,15	0,50	0,35

Контроль: $\sum W_i = 1 \quad 0,15+0,50+0,35=1$.

Пример №2: Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Варианты x_i	2	6	10
Частоты w_i	12	18	30

Решение: Найдем объем выборки: $n = 12 + 18 + 30 = 60$.

Наименьшая варианта равна 2, следовательно,

$$F^*(x) = 0 \quad \text{при } x \leq 2.$$

Значение $x \leq 6$, а именно $x_1=2$, наблюдалось 12 раз, следовательно,

$$F^*(x) = \frac{12}{60} = 0,2 \quad \text{при } 2 < x < 6.$$

Значение $x < 10$, а именно $x_1=2$ и $x_2=6$, наблюдалось 12+18 раз, следовательно,

$$F^*(x) = \frac{30}{60} = 0,5 \quad \text{при } 6 < x \leq 10.$$

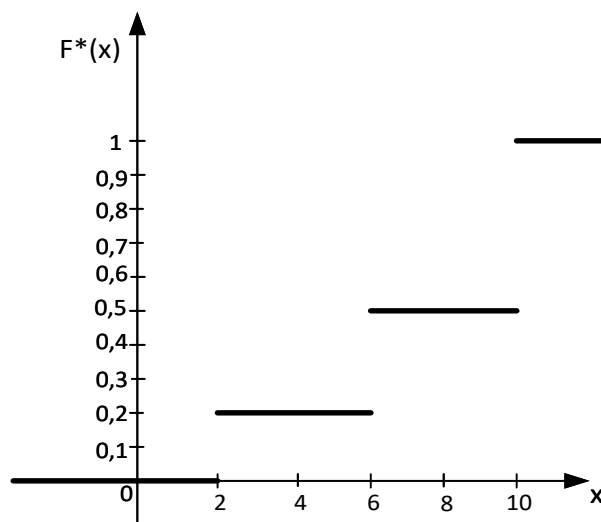
Так как $x=10$ – наибольшая варианта, то

$$F^*(x) = 1 \quad \text{при } x > 10.$$

Искомая эмпирическая функция

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0,2, & 2 < x < 6 \\ 0,5, & 6 < x \leq 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

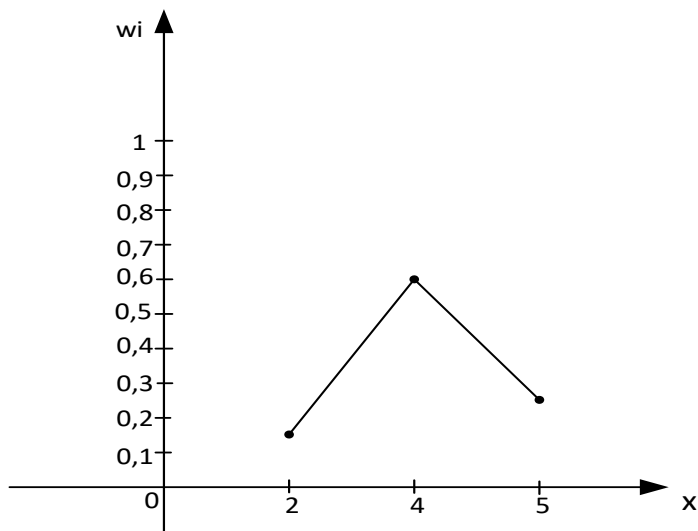
Тогда, график эмпирической функции имеет вид:



Пример № 3: Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки.

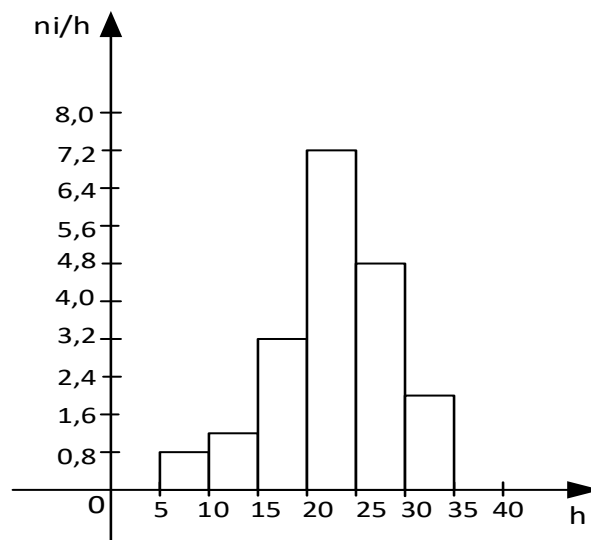
x_i	2	4	5
w_j	0,15	0,6	0,25

Решение: выполним проверку: $\sum W_i = 1$, тогда полигон относительных частот имеет вид:



Пример №4: Построить гистограмму по данным таблицы:

Частичный интервал длиной, $h = 5$	Сумма частот вариант частичного интервала, n_i	Плотность частоты, $\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

Тема: «Проверка гипотезы о законе распределения на основе критерия Пирсона»

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала по проверке гипотез.

знать:

- понятие статистических гипотез;
- понятие критерия Пирсона;
- правило проверки гипотез о нормальном законе распределения.

уметь:

- вычислять критерия Пирсона;

Подготовка к работе:

1. Повторить что такое статистическая гипотеза;
2. Повторить что такое критерия Пирсона.
3. Правило проверки гипотез о нормальном законе распределения.

Задание: Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i' , которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

Вариант 1

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n_i'	5	9	14	16	18	16	9	6	7

Вариант 2

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n_i'	6	6	14	15	22	15	8	8	6

Вариант 3

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n_i'	4	7	12	18	21	15	9	8	6

Вариант 4

n_i	4	8	16	15	20	15	9	7	6
n_i'	6	9	14	16	19	14	8	8	6

Вариант 5

n_i	4	8	16	15	20	15	9	7	6
n_i'	3	6	15	17	21	16	10	8	4

Вариант 6

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n_i'	5	9	14	16	18	16	9	6	7

Вариант 7

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n_i'	6	6	14	15	22	15	8	8	6

Вариант 8

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n'_i	4	7	12	18	21	15	9	8	6

Вариант 9

n_i	4	8	16	15	20	15	9	7	6
n'_i	6	9	14	16	19	14	8	8	6

Вариант 10

n_i	4	8	16	15	20	15	9	7	6
n'_i	3	6	15	17	21	16	10	8	4

Порядок выполнения:

Задание: При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмпирические частоты	6	13	38	74	106	85	30	14
теоретические частоты	3	14	42	82	99	76	37	13

Решение:

Сформулируем нулевую гипотезу:

H_0 - генеральная совокупность распределена нормально

- 1) для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу надо вычислить наблюдаемое значение критерия Пирсона:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i} \quad (**)$$

Составим расчетную таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2 / n'_i$	n_i^2	n_i^2 / n'_i
1	6	3	3	9	3	38	12
2	13	14	-7	1	0,07	169	12,07
3	38	42	-4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	-8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	-7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
Σ	366	366			$\chi^2_{набл} = 7,19$		373,19

Получаем, что $\chi^2_{набл} = 7,19$

2) для проверки верности решения величину критерия $\chi^2_{набл}$ вычисляем также по формуле:

$$\chi^2_{набл} = \left(\sum \frac{n_i^2}{n'_i} \right) - n$$

Контроль: $\chi^2_{набл} = 373,19 - 366 = 7,19$

Вычисления производятся правильно.

3) по таблице критических точек распределения Пирсона по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ найти критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариантов) $s = 8$; $k = 8 - 3 = 5$.

По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5), по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = 5$ находим $\chi^2_{кр}(0,05; 5) = 11,1$.

4)

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Вывод: так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Контрольные вопросы:

1. Определение статистических гипотез.
2. Определение критерия согласия.
3. Правило проверки статистических гипотез с помощью критерия Пирсона.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

Тема: Вычисление коэффициента корреляции

Цель работы: овладение практическими навыками и закрепление теоретического материала вычислению коэффициента корреляции.

знать:

- понятие корреляционной таблицы;
- понятие коэффициента корреляции.

уметь:

- применять формулы нахождения коэффициента корреляции.
- строить линии регрессии.

Подготовка к работе:

1. Повторить что такое корреляционная таблица;
2. Повторить что такое коэффициент корреляции.
3. Повторить, что такое линии регрессии

Задание. По заданной корреляционной таблице найдите:

- 1) выборочный коэффициент корреляции,
- 2) линейные уравнения регрессии Y на X и X на Y . Вычертите соответствующие прямые.

Вариант 1

Y	X						n _y
	15	20	25	30	35	40	
25	3	4					7
35		6	3				9
45			6	35	2		43
55			12	8	6		26
65				4	7	4	15
n _x	3	10	21	47	15	4	n = 100

Вариант 2

Y	X						n _y
	10	15	20	25	30	35	
20	5	1					6
30		6	2				8
40			5	40	5		50
50			2	8	7		17
60				4	7	8	19
n _x	5	7	9	52	19	8	n = 100

Вариант 3

Y	X						n _y
	4	9	14	19	24	29	
30	3	3					6
40		5	4				9
50			40	2	8		50
60			5	10	6		21
70				4	7	3	14
n _x	3	8	49	16	21	3	n = 100

Вариант 4

Y	X						n _y
	5	10	15	20	25	30	
30	2	6					8
40		5	3				8
50			7	40	2		49
60			4	9	6		19
70				4	7	5	16
n _x	2	11	14	53	15	5	n = 100

Вариант 5

Y	X						n_y
	4	8	12	16	18	20	
5	4		4				8
10		2	8				10
15		8	6	20			34
20		4		4	6	12	26
25					12	10	22
n_x	4	14	18	24	18	22	n = 100

Вариант 6

Y	X						n_y
	11	16	21	26	31	36	
6	4	2					6
10	6	8	6				20
14			10	22	16		48
18				4		12	16
22					8	2	10
n_x	10	10	16	26	24	14	n = 100

Вариант 7

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
45	2	4					6
55		3	5				8
65			5	35	5		45
75			2	8	17		27
85				4	7	3	14
n_x	2	7	9	47	29	3	n = 100

Вариант 8

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	27	
100	1	5					6
120		5	3				8
140			3	40	12		55
160			2	10	5		17
180				3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	n = 100

Вариант 9

Y	X						n _y
	10	15	20	25	30	35	
40	2	4					6
50		3	7				10
60			5	30	10		45
70			7	10	8		25
80				5	6	3	14
n _x	2	7	19	45	24	3	n = 100

Вариант 10

Y	X						n _y
	12	17	22	27	32	37	
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	35	4		45
55			2	8	6		16
65				14	7	3	24
n _x	2	10	11	57	17	3	n = 100

Вариант 11

Y	X						n _y
	15	20	25	30	35	40	
15	4	1					5
25		6	4				10
35			2	50	2		54
45			1	9	7		17
55				4	3	7	14
n _x	4	7	7	63	12	7	n = 100

Вариант 12

Y	X						n _y
	5	10	15	20	25	30	
10	3	5					8
20		4	4				8
30			7	35	8		50
40			2	10	8		20
50				5	6	3	14
n _x	3	9	13	50	22	3	n = 100

Вариант 13

Y	X						n _y
	17	22	27	32	37	42	
125					2	2	4
140				8	6		14
155		4	17	14			35
170		8	28				36
185	3	8					11
n _x	3	20	45	22	8	2	n = 100

Вариант 14

Y	X						n _y
	16	20	24	28	32	36	
80					13	2	15
95					9	4	13
110		16	24	12			52
125	6	8					14
140	4	2					6
n _x	10	26	24	12	22	6	n = 100

Вариант 15

Y	X						n _y
	10	15	20	25	30	35	
120		2					2
140	2	4	12				18
160		6	4	25			35
180			6	16	14		32
200					6	7	13
n _x	2	12	18	41	20	7	n = 100

Вариант 16

Y	X						n _y
	3	7	11	15	19	23	
15	5	2					7
25		5	2				7
35			7	39	4		50
45			1	7	9		17
55				5	5	9	19
n _x	5	7	10	51	18	9	n = 100

Вариант 17

Y	X						n _y
	16	19	22	25	28	31	
48	4		2	2			8
52		6	3	1			10
56		8	6	20			34
60		3		5	2	16	26
64			2		8	12	22
n _x	4	17	13	28	10	28	n = 100

Вариант 18

Y	X						n _y
	45	49	53	57	61	65	
180	3	3					6
190		5	4				9
200			40	2	8		50
210			5	10	6		21
220				4	7	3	14
n _x	3	8	49	16	21	3	n = 100

Вариант 19

Y	X						n _y
	81	87	93	99	105	111	
8				10	2	3	15
13					9	2	11
18		18	20	14			52
23	6	8	2				16
28	2	4					6
n _x	8	30	22	24	11	5	n = 100

Вариант 20

Y	X						n _y
	60	65	70	75	80	85	
43					3	1	4
53				9	5		14
63		1	15	19			35
73		12	24				36
83	2	7	2				11
n _x	2	20	41	28	8	1	n = 100

Вариант 21

Y	X						n _y
	15	20	25	30	35	40	
25	3	4					7
35		6	3				9
45			6	35	2		43
55			12	8	6		26
65				4	7	4	15
n _x	3	10	21	47	15	4	n = 100

Вариант 22

Y	X						n _y
	10	15	20	25	30	35	
20	5	1					6
30		6	2				8
40			5	40	5		50
50			2	8	7		17
60				4	7	8	19
n _x	5	7	9	52	19	8	n = 100

Вариант 23

Y	X						n _y
	4	9	14	19	24	29	
30	3	3					6
40		5	4				9
50			40	2	8		50
60			5	10	6		21
70				4	7	3	14
n _x	3	8	49	16	21	3	n = 100

Вариант 24

Y	X						n _y
	5	10	15	20	25	30	
30	2	6					8
40		5	3				8
50			7	40	2		49
60			4	9	6		19
70				4	7	5	16
n _x	2	11	14	53	15	5	n = 100

Вариант 25

Y	X						n _y
	4	8	12	16	18	20	
5	4		4				8
10		2	8				10
15		8	6	20			34
20		4		4	6	12	26
25				12	10	10	22
n _x	4	14	18	24	18	22	n = 100

Вариант 26

Y	X						n _y
	11	16	21	26	31	36	
6	4	2					6
10	6	8	6				20
14			10	22	16		48
18				4		12	16
22					8	2	10
n _x	10	10	16	26	24	14	n = 100

Вариант 27

Y	X						n _y
	5	10	15	20	25	30	
45	2	4					6
55		3	5				8
65			5	35	5		45
75			2	8	17		27
85				4	7	3	14
n _x	2	7	9	47	29	3	n = 100

Вариант 28

Y	X						n _y
	2	7	12	17	22	27	
100	1	5					6
120		5	3				8
140			3	40	12		55
160			2	10	5		17
180				3	4	7	14
n _x	1	10	8	53	21	7	n = 100

Вариант 29

Y	X						n_y
	10	15	20	25	30	35	
40	2	4					6
50		3	7				10
60			5	30	10		45
70			7	10	8		25
80				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n = 100$

Вариант 30

Y	X						n_y
	12	17	22	27	32	37	
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	35	4		45
55			2	8	6		16
65				14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	$n = 100$

Порядок выполнения.

Пример: По корреляционной таблице требуется: 1) вычислить выборочный коэффициент корреляции; 2) составить линейные уравнения регрессии Y на X и X на Y, построить их графики в одной системе координат.

В таблице дано распределение 100 предприятий по производственным средствам X млн руб. и суточный выработки Y т.

X	20	30	40	50	60	n_y
Y						
10	8	7	2			17
20	2	16	8	6	2	34
30		9	12	12	4	37
40			2	4	5	11
50					1	1
n_x	10	32	24	22	12	$n=100$

Решение:

1. Вычислим выборочный коэффициент корреляции.

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

$$\text{где } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_x}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_j \cdot n_y}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_x}{n}, \quad \overline{y^2} = \frac{\sum y_j^2 \cdot n_y}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{n},$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2};$$

Для этого составим рабочую таблицу:

X	20	30	40	50	60	n_y	yn_y	$y^2 n_y$	xyn
Y									
10	8	7	2			17	170	1700	4500
20	2	16	8	6	2	34	680	13600	25200
30		9	12	12	4	37	1110	33300	47700
40			2	4	5	11	440	17600	23200
50					1	1	50	2500	3000
n_x	10	32	24	22	12	$n=100$	2450	68700	103600
xn_x	200	960	960	1100	720	3940			
$x^2 n_x$	400	28800	38400	55000	43200	169400			

Используя значения, полученные в таблице, рассчитаем:

$$\bar{x} = \frac{3940}{100} = 39,4; \quad \bar{y} = \frac{2450}{100} = 24,5; \quad \overline{x^2} = \frac{169400}{100} = 1694; \quad \overline{y^2} = \frac{68700}{100} = 687.$$

$$\overline{xy} = \frac{103600}{100} = 1036$$

$$\sigma_x = \sqrt{1694 - (39,4)^2} = 11,9; \quad \sigma_y = \sqrt{687 - (24,5)^2} = 9,3;$$

$$r_g = \frac{1036 - 39,4 \cdot 24,5}{11,9 \cdot 9,3} = 0,64.$$

2. Запишем уравнения регрессии:

$$\overline{y_x} - \bar{y} = r_g \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}), \quad \overline{x_y} - \bar{x} = r_g \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}).$$

Подставляя в эти уравнения найденные величины, получаем искомые уравнения регрессии:

1) уравнение регрессии Y на X:

$$\overline{y}_x - 24,5 = 0,64 \cdot \frac{9,3}{11,9} (x - 39,4) , \text{ или } \overline{y}_x = 0,5x + 4,8 ;$$

2) уравнение регрессии X на Y:

$$\overline{x}_y - 39,4 = 0,64 \cdot \frac{11,9}{9,3} (y - 24,5) , \text{ или } \overline{x}_y = 0,82y + 19,3 .$$

Построим уравнения линии регрессии:

а) зададим координаты двух точек, удовлетворяющих уравнению

$$\overline{y}_x = 0,5x + 4,8 .$$

Пусть $x = 10$, тогда $\overline{y}_x = 9,8$.

$A_1(10; 9,8)$,

Пусть $x = 40$, тогда $\overline{y}_x = 24,8$.

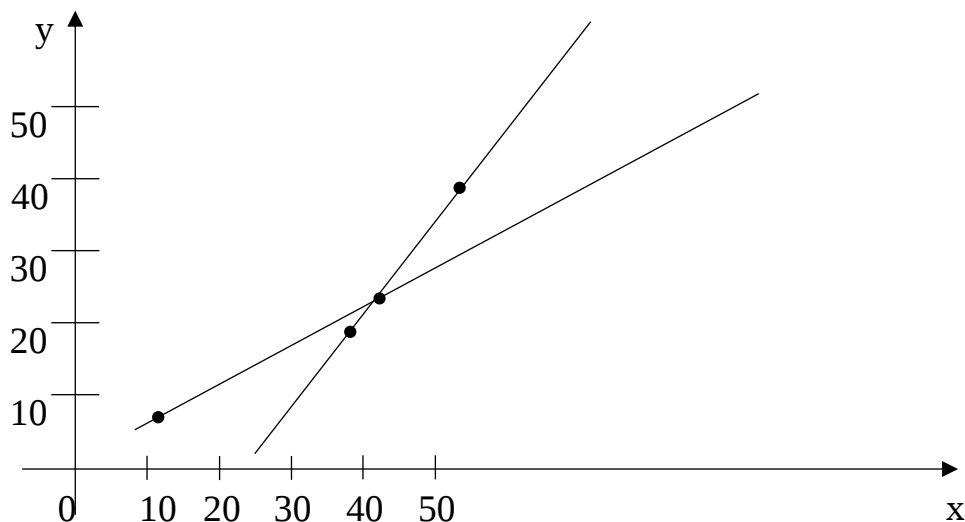
$A_2(40; 24,8)$

б) зададим аналогично координаты двух точек, удовлетворяющих уравнению

$$\overline{x}_y = 0,82y + 19,3 .$$

$B_1(35,7; 20)$, $B_2(52,1; 40)$

Построим графики найденных уравнений регрессии.



Контрольные вопросы:

1. Определение корреляции.
2. Виды корреляции.
3. Определение коэффициента корреляции.
4. Линии регрессии.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- 1) Васильев А. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для среднего профессионального образования / А. А. Васильев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 232 с.
- 2) Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для СПО / В.Е.Гмурман. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 479с
- 3) Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Учебное пособие, М.: Мир и образование, 2015. – 304 с.
- 4) Калиниченко Ю.А., Осипова В.Ю. Учебное пособие «Введение в теорию вероятностей» по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», Хабаровск.: ХИИК «СибГУТИ», 2018г
- 5) Осипова В.Ю. Учебное пособие «Математическая статистика» по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», Хабаровск.: ХИИК «СибГУТИ», 2016г
- 6) Спирина М.С., Спирин П.А. Теория вероятностей и математическая статистика 2016 ОИЦ «Академия».