

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ
И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»
(СибГУТИ)
ХАБАРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОКОММУНИКАЦИЙ (ФИЛИАЛ)
(ХИИК СибГУТИ)
СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ по дисциплине
ЕН.01 Элементы высшей математики
ЧАСТЬ 1
для студентов специальности
09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Хабаровск
2023

ББК 22

Р 189

Райлян М.Н. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 «Элементы высшей математики» ЧАСТЬ 1 для студентов специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» среднего профессионального образования. Исправленное, дополненное. – г. Хабаровск, ХИИК СибГУТИ; 2023 год

Методические указания содержат задания для выполнения практических работ по дисциплине «Элементы высшей математики», порядок и образец выполнения работ, а так же основные требования к знаниям и умениям студентов по темам в соответствии с требованиями ФГОС СПО.

Методические указания по дисциплине «Элементы высшей математики» могут быть использованы как для практических занятий под руководством преподавателя, так и для самостоятельной работы.

Для студентов специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» СПО.

Рецензент: Калиниченко Ю.А. – преподаватель высшей категории ХИИК СибГУТИ

Рассмотрено на заседании ПЦК ИСП протокол № 3 от 04.10.2023 г.

Председатель ПЦК ИСП  О.В. Диденко

г. Хабаровск, 2023 год

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа №1 Решение задач с комплексными числами	4
Практическая работа №2 Раскрытие неопределенностей пределов	10
Практическая работа №3 Исследование функции на непрерывность	15
Практическая работа №4 Нахождение производных и дифференциалов функций	20
Практическая работа №5 Исследование функций с помощью производной	24
Практическая работа №6 Полное исследование функции с построением графика	29
Практическая работа №7 Нахождение неопределенных интегралов и вычисление определенных интегралов	37
Практическая работа №8 Исследование несобственных интегралов	43
Практическая работа №9 Нахождение частных производных первого и второго порядка функции нескольких переменных	46
Рекомендуемая литература	51

Практическая работа № 1

Тема: Решение задач с комплексными числами.

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по выполнению действий над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Знать:

- понятие комплексного числа;
- геометрическую интерпретацию комплексного числа;
- формы записи комплексного числа.

Уметь:

- выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме;
- переводить из одной формы комплексное число в другую;
- выполнять действия над комплексными числами в показательной и тригонометрической форме.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе: Повторить:

- 3.1. Формы записи комплексного числа;
- 3.2. Действия над комплексными числами в различных формах;
- 3.3. Переход из одной формы комплексного числа в другую.

4. Задание:

4.1. Даны два комплексных числа z_1 и z_2 . Найти:

А) $z_1 + z_2$; Б) $z_1 * z_2$; В) $z_1 - z_2$; Г) $\frac{z_2}{z_1}$; Д) z_1^2 ; Е) Изобразить $z_1, z_2, z_1 + z_2$ на

комплексной плоскости.

4.2 Выполнить действия над комплексными числами в «удобной» форме, ответ записать в тригонометрической (показательной) форме.

4.3. Выполнить действия, результат записать в тригонометрической и показательной формах. (справочная информация в приложении)

4.4 Решить уравнение. Найти все корни уравнения, включая комплексные.

Варианты заданий к практической работе в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Варианты заданий к практической работе

Вариант 1 1. $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 5 - i$ 2. $9(\cos 70^\circ + j \sin 70^\circ) : 3e^{250j}$ 3. $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$ 4. $z^3 + 27 = 0$	Вариант 2 1. $z_1 = 5 + 4i$; $z_2 = -2 + 3i$ 2. $\frac{\sqrt{2} e^{j\frac{2\pi}{3}}}{0,5 (\cos\frac{\pi}{5} + j\sin\frac{\pi}{5})}$ 3. $\frac{(1-i)^2}{(1+i)^4}$ 4. $z^3 + 4z^2 + 7z = 0$
Вариант 3 1. $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - 3i$ 2. $3(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) \cdot 2e^{450j}$ 3. $\frac{2i^5}{1+i^{11}}$ 4. $z^3 + 4z^2 + 5z = 0$	Вариант 4 1. $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 1 + 3i$ 2. $\frac{2\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{6}}}{4(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3})}$ 3. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20} + i^{17}$ 4. $z^3 + 6z^2 + 12z = 0$
Вариант 5 1. $z_1 = 2 - 5i$; $z_2 = 5 + 2i$ 2. $8(\cos 85^\circ + j \sin 85^\circ) : 2e^{550j}$ 3. $\frac{(i-1)^3}{i^{12} + i^{31}}$ 4. $13z^2 + 10z + 2 = 0$	Вариант 6 1. $z_1 = 1 + 4i$; $z_2 = 2 - 3i$ 2. $9(\cos 50^\circ + j \sin 50^\circ) \cdot 3e^{450j}$ 3. $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^8}$ 4. $13z^3 + 10z^2 + 2z = 0$
Вариант 7 1. $z_1 = 2 - i$; $z_2 = -3 + i$ 2. $\frac{\sqrt{3} e^{j\frac{2\pi}{5}}}{9(\cos\frac{\pi}{7} + j\sin\frac{\pi}{7})}$ 3. $\frac{(2+i)^5}{-i^{11}}$ 4. $2z^3 - 2z^2 + 5z = 0$	Вариант 8 1. $z_1 = -8 - 7i$; $z_2 = -3i$ 2. $\frac{2 e^{j\frac{2\pi}{3}}}{4(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4})}$ 3. $\frac{(1+2i)^3}{i} + i^{19}$ 4. $z^3 + 2z^2 + 5z = 0$

Вариант 9 1. $z_1 = 1+i; \quad z_2 = 1-i$ 2. $5(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) \cdot 3e^{35^\circ j}$ 3. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$ 4. $z^2 + 2z + 5 = 0$	Вариант 10 1. $z_1 = 2+3i; \quad z_2 = 5+i$ 2. $9(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) \div 3e^{45^\circ j}$ 3. $\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{2i^5}$ 4. $z^3 + 2z^2 + 5z = 0$
--	--

5. Порядок выполнения.

5.1. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 - 4i$ и $z_2 = 5i$

а) $z_1 + z_2 = (2 - 4i) + (5i) = (2 + 0) + (-4 + 5)i = 2 + i$

б) $z_1 \cdot z_2 = (2 - 4i) \cdot 5i = 2 \cdot 5i - 4i \cdot 5i = 10i - 20i^2 = 10i - 20(-1) = 10i + 20 = 20 + 10i$

в) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{5i}{2-4i} = \frac{5i(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{10i+20i^2}{2^2-(4i)^2} = \frac{10i+20(-1)}{4-16i^2} = \frac{-20+10i}{4+16} = \frac{-20+10i}{20} =$
 $= -1 + \frac{1}{2}i$

г) $z_2 - z_1 = 5i - (2 - 4i) = (0 - 2) + (5i + 4i) = -2 + i$

д) $z_1^2 = (2 - 4i)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (4i) + (4i)^2 = 4 - 16i + 16i^2 = 4 - 16i - 16 = -12 - 16i$

е) Изобразим z_1, z_2, z_1+z_2 на комплексной плоскости (смотри рисунок 1.1)

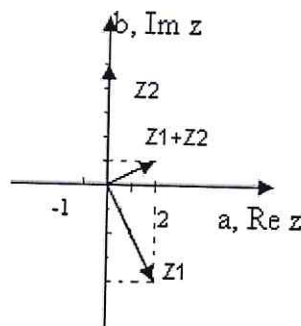


Рисунок 1.1 Изображение z_1, z_2, z_1+z_2 на комплексной плоскости

5.2 Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической (показательной) форме $3(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) \cdot 2e^{45^\circ j}$

Решение: Действие выполняется над числами в разных формах, приведем к одной. Применим формулу Эйлера и перейдем из тригонометрической к показательной форме $3(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 3e^{30^\circ j}$

$$3e^{30^\circ j} \cdot 2e^{45^\circ j} = 3 \cdot 2e^{(30^\circ+45^\circ)j} = 6e^{75^\circ j}$$

5.3 Выполнить действия в удобной форме, результат записать в показательной форме

$$\frac{(-1-i)^3}{i^4-i^{15}}$$

Решение: В данном примере удобно сразу перейти в показательную форму комплексного числа, пусть $z_1 = -1 - i$, $z_2 = i^4 - i^{15}$.

Возведём z_1 в степень 3, получим $z_1^3 = (-1 - i)^3$

Преобразуем $z_2 = i^4 - i^{15}$, т.к. $i = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$, то запишем все степени в таком виде, чтобы они были кратны 4, т.е. по свойствам степеней $z_2 = i^4 - i^{12+3} = i^4 - i^{12} \cdot i^3 = 1 - (i^4)^3 \cdot i^3 = 1 - 1^3 \cdot i^3 \Rightarrow$

$$z_2 = 1 - i^3 = 1 - (-i) = 1 + i, \text{ значит } z_2 = 1 + i$$

Запишем z_1 и z_2 в показательной форме $z = re^{i\phi}$, для этого найдем длину r и аргумент ϕ для z_1 и z_2 .

Найдем z_1 : $z_1 = -1 - i$, значит $a = -1$ и $b = -1$, найдем модуль комплексного числа $r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, т.к. $a < 0, b < 0$, следовательно аргумент ϕ_1 в 3 четверти и равен

$$\phi_1 = \pi - \arctg \left| \frac{b}{a} \right| = \pi - \arctg \left| \frac{1}{1} \right| = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$, значит $(z_1)^3 = (\sqrt{2})^3 e^{\frac{9\pi}{4}i}$ - показательная форма записи числителя.

Найдем z_2 : $z_2 = 1 + i \Rightarrow \phi_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\phi_2 = \arctg \frac{b}{a}, \text{ т.к. } a > 0, b > 0, \text{ получим } \phi_2 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - \text{пока-}$$

зательная форма записи числа z_2 .

Выполним действие деления над числами в показательной форме, z_1^3/z_2 :

$$\frac{(z_1)^3}{z_2} = \frac{(\sqrt{2})^3 e^{\frac{9\pi}{4}i}}{\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}} = (\sqrt{2})^2 e^{(\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4})i} = 2e^{\frac{8\pi}{4}i} = 2e^{2\pi i}$$

5.4. Решить уравнение $z^3 - 4z^2 + 8z = 0$. Найти все корни уравнения, включая комплексные.

Решение:

$$z(z^2 - 4z + 8) = 0;$$

$$z_1 = 0;$$

$$z^2 - 4z + 8 = 0; z_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4j}{2} = 2 \pm 2j$$

$$z_{2,3} = 2 \pm 2j$$

Ответ: $z_1 = 0$; $z_2 = 2 + 2j$; $z_3 = 2 - 2j$

6. Контрольные вопросы:

6.1. Можно ли выполнить деление над комплексными числами в показательной форме?

6.2. В какой четверти лежит вектор комплексного числа $z = -2 + 3i$ и чему равен его аргумент?

6.3. Формула Эйлера.

6.4. Где используются комплексные числа?

7. Приложение. Теоретический материал.

Определение: комплексными числами называются числа вида $z = a + bi$, где a и b - действительные числа, а число i , определяемое равенством $i^2 = -1$, называется мнимой единицей. Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$, называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Определение: комплексное число $a - bi$ называется комплексно-сопряженным с числом $z = a + bi$ и обозначается $z^* = \bar{z} = a - bi$

Определение: Модулем комплексного числа $z = a + bi$, называется число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Правило сложения:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Правило вычитания:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Правило умножения:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i\end{aligned}$$

Правило деления:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} &= \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \cdot (a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2 - (b_2 i)^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (-a_1 b_2 + a_2 b_1)i}{a_2^2 + b_2^2}\end{aligned}$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r - модуль комплексного числа; φ - один из его аргументов.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и один из аргументов. Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно находить из системы по формулам

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{если } \varphi \text{ в 1 четверти} \\ \pi - \arctg \left| \frac{b}{a} \right|, & \text{если } \varphi \text{ в 2 четверти} \\ \pi + \arctg \left| \frac{b}{a} \right|, & \text{если } \varphi \text{ в 3 четверти} \\ \arctg \frac{b}{a}, & \text{если } \varphi \text{ в 4 четверти} \end{cases}$$

Пусть заданы два комплексных числа в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Умножение: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$

Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2))$

Возведение в степень: Если $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$z^n = (r (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Формула Эйлера: $re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Практическая работа №2

Тема: Раскрытие неопределенностей пределов.

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по нахождению пределов и раскрытию неопределённостей вида:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty}; 1^{\infty}.$$

Знать:

- определение предела функции;
- определение бесконечно малой величины;
- основные теоремы о пределах;
- первый, второй замечательные пределы.

Уметь:

- раскрывать неопределённости типа $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}$;
- использовать I, II замечательные пределы при вычислении пределов;
- использовать свойства эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

3.1 Повторить определение предела функции.

3.2 Повторить основные теоремы о пределах.

3.3 Повторить I, II замечательные пределы.

3.4 Повторить методы раскрытия неопределённостей вида: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 1^{\infty}$.

4. Задание: Вычислить пределы не используя правило Лопиталя (таблица 2.1)

Таблица 2.1 Варианты заданий к практической работе

Вариант 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x + 7}{4x^2 + 7x - 9}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 6x + 7}{2x^2 + 8}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{3x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 5x}{4x^3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{x-1}$	Вариант 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^9 + 16x^2 + 3}{5x^5 + 17}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x + 7}{5x^3 + 4x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{1}{x-6} - \frac{12}{x^2-36} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x-4)}{16-x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 4x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{7x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^x$
Вариант 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 + 6x + 8}{3x^3 + 6x + 2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x + 9}{6x^3 + 8x + 7}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^x$	Вариант 4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 6x + 8}{14x^2 - 3x - 8}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 5x^2 + 8}{3x^6 + 5x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{5x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x} \right)^x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{x-1}$

Вариант 5 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 6x + 8}{12x^5 - 5x + 6}$ 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 6x - 3}{2x^6 + 1}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{16}{1-x^2} \right)$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{7x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x} \right)^{-3x}$ 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x} \right)^{3x}$	Вариант 6 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 3}{4x^3 - 5x + 6}$ 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 3}{2x + 21}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{1}{x-8} - \frac{16}{x^2 - 64} \right)$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3}{\operatorname{tg}^3 7x}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$ 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x}$ 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}$
Вариант 7 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$ 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x^2 + 8}{4x^4 + 6x^2 + 2}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 3x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{5x^3}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{6x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x} \right)^x$ 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1}$	Вариант 8 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 6x + 3}{4x^3 - 3x + 8}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{3x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{2x^2}}$ 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^x$

Вариант 9

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 + 3}{4x^2 + 1}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 6x - 7}{6x^3 + 3x + 8}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{1}{x-7} - \frac{14}{x^2 - 49} \right)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin^2 8x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x^2}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x+2}$

Вариант 10

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + x + 1}{8x^4 + 4x^3 - 81}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + 4x^2 + 8}{x^4 + 2x + 1}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{10}{x^2 - 25} \right)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^4 4x}{3x^4}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{16 - x^2}{\sin(x+4)}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x^2}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{x+2}$

5. Порядок выполнения

$$5.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x+2)(x-4)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{раскроем} \\ \text{скобки в знаменателе} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 8} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{делим на } x^s, \text{ где } s = \max(3; 2) \\ s = 3 \Rightarrow \div x^3 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} - \frac{8}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{1 + \frac{1}{+\infty}}{\frac{1}{+\infty} - \frac{2}{+\infty} - \frac{8}{+\infty}} = \frac{1 + 0}{0 - 0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$5.2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 6}{x^3 - 2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \div x^s, \text{ где } s = \max(3; 3) \\ \div x^3 \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} - \frac{6}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2 + \frac{4}{\infty} - \frac{6}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$5.3 \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5}{6+x-x^2} - \frac{1}{3-x} \right) = \left(\frac{5}{6+3-9} - \frac{1}{3-3} = \frac{5}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \right) = \left| \begin{array}{l} \text{приведём к} \\ \text{общему знаменателю} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-5}{(x-3)(x+2)} + \frac{1}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5+1 \cdot (x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5}$$

$$5.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{I замечательный} \\ \text{предел} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$5.5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 4x}{3 \operatorname{tg}^4 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{по таблиц эквивалентных} \\ \text{бесконечно малых} \\ \sin \alpha \sim \alpha, \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha \\ \sin^4 4x \sim (4x)^4, \operatorname{tg}^4 3x \sim (3x)^4 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^4 \cdot x^4}{3 \cdot 3^4 \cdot x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^4}{3^5} = \frac{4^4}{3^5}$$

$$5.6 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{2x} = (1^\infty) = \left| \begin{array}{l} \text{II замечательный предел} \end{array} \right| \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^{\beta x} = e^{\alpha \beta} = e^{5 \cdot 2} = e^{10}$$

$$5.7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\cos x (1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\cos x (\sin^2 x)} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по таблиц эквивалентных} \\ \text{бесконечно малых} \\ \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} 3x \sim 3x \\ \sin \alpha \sim \alpha \Rightarrow \sin^2 x \sim x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 3x}{\cos x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2 \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\cos x} = \frac{3}{1} = 3$$

$$5.8 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-2} \right)^{x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2x}{2x} + \frac{1}{2x}}{\frac{2x}{2x} - \frac{2}{2x}} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 - \frac{1}{x}} \right)^{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{x+3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{x+3}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^3}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right)^3} = \frac{e^{\frac{1}{2} \cdot 1} \cdot (1+0)^3}{e^{-1 \cdot 1} \cdot (1-0)^3} = \frac{e^{\frac{1}{2}} \cdot 1^3}{e^{-1} \cdot 1^3} = e^{\frac{1}{2} - (-1)} = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}$$

6. Контрольные вопросы

6.1 Понятие предела функции;

6.2 Понятие бесконечно малой функции;

6.3 Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы;

6.4 Правила раскрытия неопределенностей.

Практическая работа №3

Тема: Исследование функций на непрерывность.

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по исследованию функции на непрерывность.

Знать:

- понятие левостороннего и правостороннего предела;
- определение непрерывной функции в точке;
- необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке;
- классификацию точек разрыва.

Уметь:

- находить левосторонний и правосторонний предел;
- исследовать функцию на непрерывность в точке;
- находить точки разрыва и определить их род.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

- 3.1 Повторить определение непрерывной функции в точке;
- 3.2 Понятие левостороннего и правостороннего пределов;
- 3.3 Классификация точек разрыва.

4. Задание:

- 4.1 Для заданной функции установить является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента. Сделать схематичный чертёж.
- 4.2 Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертёж.

Варианты заданий практической работы приведены в таблице 3.1

Таблица 3.1 Варианты задний к практической работе

Вариант 1 1) $f(x) = 5, \frac{1}{x-3}, x_1 = 3, x_2 = 5$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{если } 1 < x \leq 3 \\ x-3, & \text{если } 3 < x < \infty \end{cases}$	Вариант 6 1) $f(x) = 12^{\frac{1}{2-x}}, x_1 = 2, x_2 = 3$ 2) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{если } 1 < x \leq 2 \\ -x^2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$
Вариант 2 1) $f(x) = 7^{\frac{1}{x-4}}, x_1 = 4, x_2 = 3$ 2) $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{если } 0 < x < 2 \\ 2x, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$	Вариант 7 1) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}}, x_1 = 5, x_2 = 2$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0 \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} + 1, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
Вариант 3 1) $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}, x_1 = 2, x_2 = -2$ 2) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x, & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ 2, & \text{если } x > 1 \end{cases}$	Вариант 8 1) $f(x) = 4^{\frac{1}{5-x}}, x_1 = 5, x_2 = 1$ 2) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 1 \\ x-1, & \text{если } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$
Вариант 4 1) $f(x) = 7^{\frac{1}{x+3}}, x_1 = -3, x_2 = -5$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x < 0 \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} + 1, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	Вариант 9 1) $f(x) = 6^{\frac{1}{x-7}}, x_1 = 7, x_2 = -3$ 2) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leq x < 2 \\ x+3, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$
Вариант 5 1) $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}, x_1 = 1, x_2 = -5$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x+2, & \text{если } 0 < x \leq 2 \\ x-3, & \text{если } x > 2 \end{cases}$	Вариант 10 1) $f(x) = 8^{\frac{1}{x+7}}, x_1 = -7, x_2 = 6$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x < 1 \\ -x^2 + 3, & \text{если } 1 \leq x < 3 \\ x-4, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$

5. Порядок выполнения.

5.1 Для заданной функции установить является ли данная функция $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ непрерывной или разрывной при $x_1=1$ и $x_2=2$. Сделать схематический чертеж.

Решение: а) Рассмотрим поведение функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ в точке $x_1=1$.

Область определения данной функции $x \neq 1$ значит, функция в $x_1=1$ не определена. Проверим какого рода разрыв имеет функция в этой точке. Для этого найдем левый и правый предел функции в точке $x_1=1$.

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{1}{1+0-1}} = 2^{\frac{1}{0}} = 2^{\infty} = \infty$$

И так, $f(1+0) = \infty$, если хотя бы один из пределов равен бесконечности, точка $x_1=1$ является точкой разрыва второго рода.

б) Исследуем функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ в точке $x_2=2$.

Найдем значение функции в этой точке: $f(2) = 2^{\frac{1}{2-1}} = 2^1 = 2$ следовательно, функция в точке $x_2=2$ определена.

Найдём левый и правый предел функции в этой точке:

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^1 = 2; \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^1 = 2. \text{ Следовательно, свойство непрерывности выполняется: } f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 2, \text{ значит в точке}$$

$x_2=2$ функция $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ непрерывна. Учитывая решение в пункте а) и б) сделаем схематический чертеж (рисунок 3.1).

5.2. Найти точки разрыва функции, сделать чертеж

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 1 \\ -x, & 1 \leq x < 3 \\ x + 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

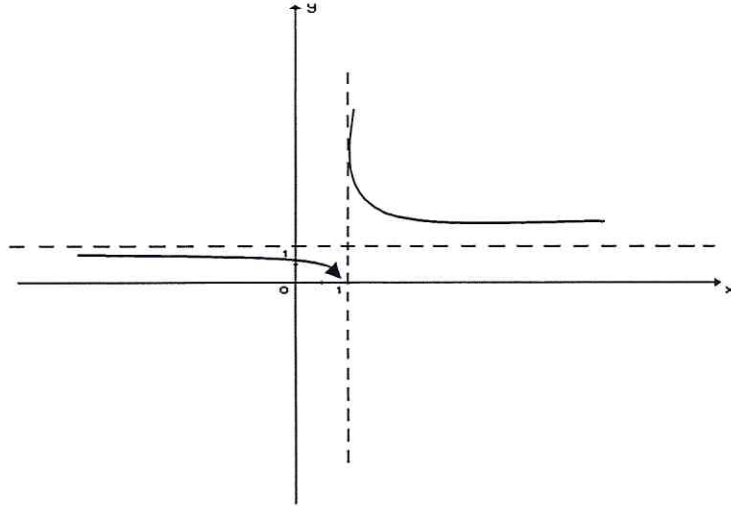


Рисунок 3.1. Схематический чертеж функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$

Решение: Данная функция неэлементарная, область ее определения: $(-\infty; 1) \cup [1; 3) \cup [3; +\infty)$, то есть вся числовая ось, на каждом интервале функция задана элементарной функцией, каждая из которых непрерывна (по определению). Следовательно, разрыв может наступить лишь в точках, где меняется аналитическое выражение, то есть в точках $x_1=1$ и $x_2=3$. Исследуем их. Найдём значение функции и пределы функции слева и справа в этих точках «перехода».

а) Проверим функцию в точке $x_1=1$. Найдём значение функции в точке:

$$f(1) = (-x) \Big|_{x=1} = -1$$

Найдём левый и правый предел функции:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 - 2) = (1-0)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (-x) = (-1-0) = -1$$

Условие непрерывности в точке $x_1=1$ выполняется: $f(1) = f(1-0) = f(1+0) = -1$, следовательно в точке $x_1=1$ функция непрерывна.

б) Проверим функцию в точке $x_2=3$ и выполним действия как в пункте а):

$$f(3) = 3 + 4 = 7$$

$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (-x) = -(3-0) = -3+0 = -3$$

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x+4) = 3+0+4 = 7$$

$f(3) = f(3+0) \neq f(3-0) = \text{const}$, следовательно $x_2=3$ - точка разрыва первого рода, точка скачка.

Величина скачка: $\lambda = |7 - (-3)| = 10$.

Построим график функции заданной функции (рисунок 3.2).

Замечание: График функции $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 1 \\ -x, & 1 \leq x < 3 \\ x + 4, & x \geq 3 \end{cases}$ строим, учитывая область ее

определения: $(-\infty; 1) \cup [1; 3) \cup [3; +\infty)$, то есть на каждом интервале строим данную элементарную функцию.

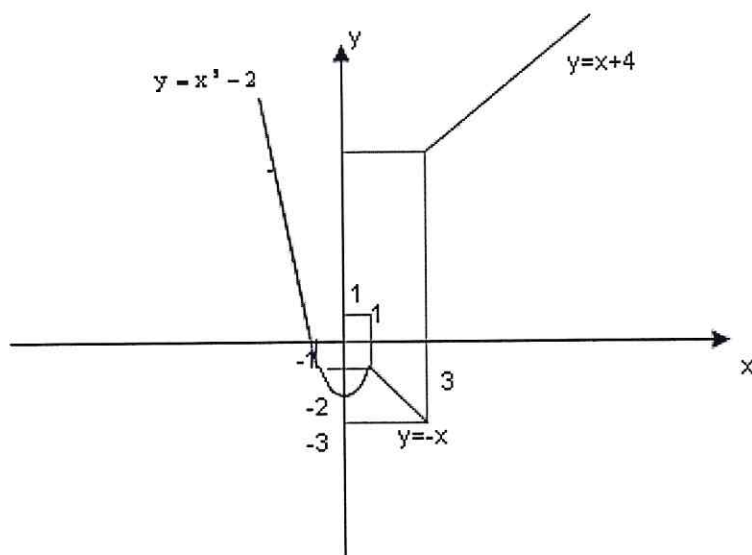


Рисунок 3.2 График неэлементарной функции $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 1 \\ -x, & 1 \leq x < 3 \\ x + 4, & x \geq 3 \end{cases}$.

6. Контрольные вопросы:

- 6.1 Какая функция называется непрерывной?
- 6.2 Какой предел называется левосторонним? Правосторонним?
- 6.4 Какие точки разрыва существуют?
- 6.5 Как определить род точек разрыва?

6.6 Как построить график не элементарной функции?

Практическая работа № 4

Тема: Нахождение производных и дифференциалов функций

1. **Цель:** Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по нахождению производных и дифференциалов функций одной независимой переменной.

Знать:

- определение производной;
- правила дифференцирования;
- формулы дифференцирования;
- понятия сложной функции;
- понятие дифференциала функции.

Уметь:

- находить производную табличной функции;
- находить производную сложной функции;
- находить дифференциал функции.

2. **Литература:** Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учред. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

2. Подготовка к работе:

- 3.1. Повторить правила и формулы дифференцирования;
- 3.2. Повторить дифференцирование сложной функции.

4. Задания:

- 4.1 Найти производные функций (примеры 1-4).
- 4.2 Найти дифференциал функции (пример 5).

Варианты заданий практической работы приведены в таблице 4.1

Таблица 4.1 Варианты задний к практической работе

Вариант 1 1) $y = 2\sin 4x^2$ 2) $y = \frac{\ln x}{x^7}$ 3) $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$ 4) $y = 3^x(x^2+4)$ 5) $y = \ln(\arccos x^3)$	Вариант 2 1) $y = \cos^5(1+2x)$ 2) $y = \frac{e^{-x}}{\sin x}$ 3) $y = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} \right)$ 4) $y = 2^{2x}(x^2-4)$ 5) $y = \ln(\arcsin \sqrt{x})$
Вариант 3 1) $y = 7\cos 3x^3$ 2) $y = \frac{7^x+1}{x^2}$ 3) $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{1}{2x}$ 4) $y = \ln(2x e^{x^2})$ 5) $y = \arcsin(\sqrt{x^4+1})$	Вариант 4 1) $y = \ln(1+2x)^2$ 2) $y = 3\sqrt{x} \cdot e^{2x}$ 3) $y = \frac{2^{5x}}{\operatorname{tg} x^2}$ 4) $y = \sqrt[3]{x} - 2x^{-2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 5) $y = \arccos \sqrt{x^3}$
Вариант 5 1) $y = 2\operatorname{tg} \frac{x^2}{2}$ 2) $y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}$ 3) $y = 2x^2 \cos 3x$ 4) $y = \frac{-5}{x^5} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 5) $y = 12^{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$	Вариант 6 1) $y = 3\ln(1+x^2)$ 2) $y = \frac{\cos x}{2^{x-1}}$ 3) $y = e^{3x} \operatorname{tg} x^2$ 4) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 7x^{-3} - \frac{1}{x^2}$ 5) $y = \arcsin(\cos 2x)$
Вариант 7 1) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$ 2) $y = \frac{e^{2x}}{x^2+3}$ 3) $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[8]{x}} + \frac{2}{x^2} \right)$ 4) $y = 5^x(x^3-5)$ 5) $y = \ln(\arcsin 2x)$	Вариант 8 1) $y = 3^{\operatorname{tg} x}$ 2) $y = \frac{3e^{2x}}{x^2+1}$ 3) $y = x \sin^3 4x$ 4) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$ 5) $y = \operatorname{arctg}(\ln 2x)$

Вариант 9 1) $y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$ 2) $y = \frac{4x-1}{x^4+1}$ 3) $y = 2x^3 e^{3x}$ 4) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$ 5) $y = \arcsin(\ln 5x)$	Вариант 10 1) $y = e^{\cos x}$ 2) $y = x^2 \sin 2x$ 3) $y = \frac{2 \ln 3x}{x^2}$ 4) $y = \frac{1}{x^4} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{x}$ 5) $y = \operatorname{arcctg}(\sqrt{x})$
---	--

5. Пример выполнения

5.1 Найти производную сложной функции $y = \sin^2 \sqrt{x}$

Решение: Найдём производную сложной функции используя правила и формулы дифференцирования.

$$\begin{aligned}
 y' &= (\sin^2 \sqrt{x})' = 2 \sin \sqrt{x} \cdot (\sin \sqrt{x})' = 2 \sin \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = 2 \sin \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot \sin \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

5.2. Найти производную сложной функции $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$

Решение: Воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{u}{v} \right)' &= \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \\
 y' &= \frac{(1 + \sin 2x)' \cdot (1 - \sin 2x) - (1 - \sin 2x)' \cdot (1 + \sin 2x)}{(1 - \sin 2x)^2} = \\
 &= \frac{2 \cos 2x \cdot (1 - \sin 2x) - (-2 \cos 2x) \cdot (1 + \sin 2x)}{(1 - \sin 2x)^2} = \frac{2 \cos 2x (1 - \sin 2x + 1 + \sin 2x)}{(1 - \sin 2x)^2} = \\
 &= \frac{2 \cos 2x \cdot 2}{(1 - \sin 2x)^2} = \frac{4 \cos 2x}{(1 - \sin 2x)^2}
 \end{aligned}$$

5.3. $y = 5^{2x} \cdot \operatorname{tg} x^2$

Решение: Воспользуемся правилом дифференцирования произведения

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$y' = (5^{2x})' \cdot \operatorname{tg} x^2 + (\operatorname{tg} x^2)' \cdot 5^{2x} = 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot (2x)' \cdot \operatorname{tg} x^2 + \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot (x^2)' \cdot 5^{2x} = 2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot \operatorname{tg} x^2 + \frac{2x \cdot 5^{2x}}{\cos^2 x^2}, \text{ получили } y' = 2 \cdot \ln 5 \cdot 5^{2x} \cdot \operatorname{tg} x^2 + \frac{2x \cdot 5^{2x}}{\cos^2 x^2}$$

$$5.4. \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^4}$$

Решение: Воспользуемся правилами дифференцирования суммы (разности) и формулой дифференцирования степенной функции, получим

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^4} \right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' + \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}} \right)' - \left(\frac{2}{x^4} \right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' + \left(5x^{-\frac{1}{3}} \right)' - (2x^{-4})' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 8x^{-5} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{8}{x^5}, \text{ получили } y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{8}{x^5}$$

$$5.5. \quad y = \ln(\arcsin \sqrt{x})$$

Решение: Воспользуемся формулой для нахождения дифференциала функции и правилом дифференцирования сложной функции.

$$y' = (\ln(\arcsin \sqrt{x}))' = \frac{1}{\arcsin \sqrt{x}} \cdot (\arcsin \sqrt{x})' = \frac{1}{\arcsin \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{\arcsin \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Дифференциал функции равен $dy = \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x}}$

6. Контрольные вопросы:

- 6.1. Проверьте, помните ли вы на память таблицу производных элементарных функций.
- 6.2. Формула производной произведения и частного.
- 6.3. Правила и формулы дифференцирования.
- 6.4 Дифференцирование сложной функции.

7. Приложение. Теоретический материал.

Правила дифференцирования

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в точке x_0 . Тогда в этой точке имеют производные их сумма, произведение и частное, причём:

$$\text{а) } (u+v)' = u' + v'; \quad \text{б) } (uv)' = u'v + uv'; \quad \text{в) } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ при } v \neq 0.$$

Формулы дифференцирования

№	$f(x)$	$f'(x)$	№	$f(x)$	$f'(x)$
1.	$C = const$	0	10.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2.	x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	11.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3.	a^x	$a^x \cdot \ln a$	12.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	e^x	e^x	13.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
5.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	14.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
6.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	15.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
7.	$\sin x$	$\cos x$	16.	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
8.	$\cos x$	$-\sin x$	17.	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
9.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	18.	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Формула для нахождения дифференциала функции

$$dy = y' dx$$

Практическая работа № 5

Тема: Исследование функций с помощью производных.

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по исследованию функций с помощью производных.

Знать:

- правила дифференцирования

- формулы дифференцирования;
- определение убывающей, (возрастающей) функции;
- определение точек локального максимума, (минимума);
- понятие выпуклого (вогнутого) графика функции;
- условие монотонности функций в зависимости от $f'(x_0)$;
- понятие точки максимума и минимума;
- определение точек экстремума;
- условие точек экстремума;
- определение выпуклого и вогнутого графика функции;
- условие выпуклости (вогнутости) графика функции.

Уметь:

- исследовать с помощью $f'(x)$ на монотонность и экстремум функцию $f'(x)$;
- исследовать с помощью $f''(x)$ на выпуклость и вогнутость графика функции.

3. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

3.1 Повторить исследование функции с помощью $f'(x)$ на монотонность и экстремум функцию $f'(x)$;

3.2 Повторить исследование функции с помощью $f''(x)$ на выпуклость и вогнутость графика функции.

4. Задание:

4.1 Найти точки экстремума функции (задние под номером 1).

4.2 Найти участки возрастания и убывания функции (задание 2).

4.3 Найти участки выпуклости и вогнутости функции (задание 3).

Варианты заданий практической работы приведены в таблице 5.1

Таблица 5.1 Варианты задний к практической работе

Вариант 1 1. $f(x) = e^{5x} - 5x + 1$ 2. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 3. $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$	Вариант 2 1. $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ 2. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ 3. $f(x) = \frac{3}{x}$
Вариант 3 1. $f(x) = e^{x(x-1)}$ 2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 3. $f(x) = x \cdot e^{-x}$	Вариант 4 1. $f(x) = \ln(2x) + \frac{1}{x}$ 2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x+1}$ 3. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
Вариант 5 1. $f(x) = x^2 e^{-x}$ 2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ 3. $f(x) = x \cdot \ln(x)$	Вариант 6 1. $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ 2. $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ 3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$
Вариант 7 1. $f(x) = \ln(2 - x^2)$ 2. $f(x) = e^{-x}$ 3. $f(x) = x + \frac{4}{x}$	Вариант 8 1. $f(x) = \ln(4 - x^2)$ 2. $f(x) = e^{-2x}$ 3. $f(x) = x + \frac{3}{x}$
Вариант 9 1. $f(x) = e^x + e^{-x}$ 2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 2$	Вариант 10 1. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 2. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ 3. $f(x) = x - \sqrt{x}$

5. Порядок выполнения

Дана функция $y = 2 - 3x + x^3$

5.1 Найдите точки экстремума функции. Воспользуемся алгоритмом исследования функции с помощью производной.

Алгоритм:

- 1) находим область определения функции $y = f(x)$;

- 2) находим производную функции $y' = f'(x)$;
- 3) находим критические точки функции, решая уравнение $f'(x) = 0$;
- 4) наносим критические точки на числовую ось с учетом области определения функции;
- 5) определяем знак производной функции на полученных промежутках;
- 6) делаем вывод о поведении функции по правилу: если производная функции на интервале меньше нуля, то функция убывает на этом интервале; если производная функции на интервале больше нуля, то функция возрастает на этом интервале;
- 7) определяем точки экстремума функции по правилу: если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «-», то имеем точку максимума, а если с «-» на «+», то имеем точку минимума; если производная в критической точке не меняет знак, значит в этой точке нет экстремума.

Учитывая алгоритм, выполним следующие действия:

- 1) Область определения функции: $x \in \mathbb{R}$
- 2) Найдем производную функции: $y' = (2 - 3x + x^3)' = 0 - 3 + 3x^2 = -3 + 3x^2$
- 3) Найдём критические точки. Приравняем производную к нулю $y' = 0$:
 $-3 + 3x^2 = 0$; $3x^2 = 3$; $x^2 = 1$; $x_1 = 1, x_2 = -1$ - критические точки первого рода.
- 4) Изобразим числовую ось, с учетом области определения. Отметим критические точки и получим три интервала. Определим знак производной на полученных интервалах (рисунок 5.1)



Рисунок 5.1. Графическое изображение поведения функции на интервалах, с учетом знака первой производной

- 5) Определим знак производной на полученных интервалах
 $x \in (-\infty; -1) \Rightarrow f'(-2) > 0 \Rightarrow f(x)$ на этом интервале возрастает
 $x \in (-1; 1) \Rightarrow f'(0) < 0 \Rightarrow f(x)$ на этом интервале убывает

$x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(2) > 0 \Rightarrow f(x)$ на этом интервале возрастает

б) Делаем вывод

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ - функция возрастает; $(-1; 1)$ - функция убывает.

5.2 Исследуем функцию на экстремум

Следуя алгоритму смотри пункты а) – г) в 5.1. Делаем вывод, так как при переходе через $x_1 = -1$ производная меняет знак с “+” на “-” $\Rightarrow x_1 = -1$ - точка максимума, а при переходе через $x_2 = 1$ производная меняет знак с “-” на “+” $\Rightarrow x_2 = 1$ - точка минимума.

Найдём значение функции в этих точках:

$$f_{\max}(-1) = 2 - 3(-1) + (-1)^3 = 2 + 3 - 1 = 4$$

$$f_{\min}(1) = 2 - 3 \times 1 + 1^3 = 2 - 3 + 1 = 0$$

Ответ: Точка максимума $(-1; 4)$; Точка минимума $(1; 0)$

5.3 Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость.

Воспользуемся теоремой о выпуклости и вогнутости функции.

Теорема: Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0 \in (a; b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x) > 0$ всюду на интервале $(a; b)$, то функция *вогнутая на этом интервале*, если $f''(x) < 0$, то функция *выпуклая*.

Исследование на выпуклость и вогнутость выполняем с помощью второй производной.

Производную функции $y = 2 - 3x + x^3$ нашли в пункте 5.1

а) Область определения: $x \in \mathbb{R}$

б) Найдём первую производную $y' = -3 + 3x^2$

в) Найдём вторую производную y'' , $y'' = (-3 + 3x^2)' = 0 + 6x = 6x$

г) Приравняем вторую производную к нулю $y'' = 0$ и найдём критические точки второго рода $6x = 0$; $x = 0$ - критическая точка второго рода.

д) Изобразим числовую ось, отметим критические точки второго рода и определим знаки второй производной на интервалах (рисунок 5.2)

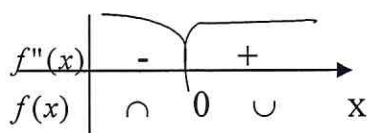


Рисунок 5.2. Графическое изображение поведения функции на интервалах, с учетом знака второй производной

$x \in (-\infty; 0) \quad f''(-1) < 0 \Rightarrow$ график выпуклый

$x \in (0; +\infty) \quad f''(1) > 0 \Rightarrow$ график вогнутый

$x = 0$ – точка перегиба, найдем значение функции в точке $x=0$,
 $f(0) = 2 - 3 \times 0 + 0^3 = 2$

Ответ: на интервале $(-\infty; 0)$ - график выпуклый; на интервале $(0; +\infty)$ - график вогнутый; на интервале $(0; 2)$ - точка перегиба.

6. Контрольные вопросы.

- 6.1 Какая функция называется монотонной?
- 6.2 Какая функция называется монотонной возрастающей (убывающей)?
- 6.3 Какая точка называется точкой локального минимума (максимума)?
- 6.4 Какой график является выпуклым (вогнутым)?
- 6.5 При каком условии функция убывает (возрастает)?
- 6.6 При каком условии точка x_0 является точкой максимума (минимума)?
- 6.7 При каком условии график функции выпуклый (вогнутый)?

Практическая работа № 6

Тема: Полное исследование функции и построение графика.

1. **Цель:** Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по полному исследованию функций с помощью производных.

Знать:

- понятие области определения функции;
- правила и формулы дифференцирования;
- понятие монотонно убывающей и монотонно возрастающей функции;

- понятие выпуклости и вогнутости графика функции;
- понятие асимптоты графика функции;
- формулы для нахождения наклонных и вертикальных асимптот.

Уметь:

- исследовать функцию на монотонность и экстремумы;
- исследовать функцию на выпуклость и вогнутость графика функции;
- находить наклонные и вертикальные асимптоты;
- строить график функции по полученным исследованиям.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

- 3.1 повторить таблицу производных;
- 3.2 повторить условие монотонности и экстремума функции;
- 3.3 повторить условие выпуклости и вогнутости графика функции;
- 3.4 повторить формулы нахождения асимптот графика функции;
- 3.5 повторить общую схему исследования.

4. Задание.

Исследовать функцию по схеме и построить график.

Схема исследования функции с помощью производной:

1. Область определения функции, точки разрыва.
2. Точки пересечения графика с осями координат, если это возможно.
3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
4. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
5. Исследовать функцию на выпуклость и вогнутость, точки перегиба.
6. Исследовать функцию на асимптоты (вертикальные и наклонные).
7. Построить график функции.

Варианты заданий практической работы приведены в таблице 6.1

Таблица 6.1 Варианты заданий к практической работе

Вариант	Задание 1	Задание 2
В-1	$y = (2-x)(x+1)^2$	$y = \frac{x}{(x-2)^2}$
В-2	$y = 4x^3 + x^2 - 2x$	$y = \frac{(3x-2)^2}{x-1}$
В-3	$y = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$	$y = e^{1-x^2}$
В-4	$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	$y = x^2 e^{-x}$
В-5	$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$	$y = \frac{\ln x}{x}$
В-6	$y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2$	$y = x \ln^2 x$
В-7	$y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$	$y = e^x - x$
В-8	$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 3$	$y = \frac{x^2}{x+2}$
В-9	$y = (x+1)^2(x-5)$	$y = \frac{4x^2-1}{x}$
В-10	$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$	$y = \frac{e^x}{1-x}$

5. Пример выполнения.

5.1 Исследуем функцию по схеме $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$, построим график.

1. Область определения функции: $x \in R$, т.е. x – любое действительное число, следовательно, точек разрыва нет.

2. Точки пересечения графика с осями координат $x = 0 \Rightarrow y = -6$: пересечение с Оу; Пересечение с Ох: $y=0$ $x^3 - 6x^2 + 2x - 6 = 0$ найти затруднительно (целых корней нет, т.к. не один делитель 6 не является корнем уравнения).

3. Исследуем на четность, нечетность

$y(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 2(-x) - 6 = -x^3 - 6x^2 - 2x - 6 = -(x^3 + 6x^2 + 2x + 6) \neq y(x) \neq -y(x) \Rightarrow$
 функция ни четная, ни не четная $\Rightarrow$ график не симметричен Ох, ни (0;0).

4. Исследуем функцию на монотонность и экстремумы

$$y'(x) = (x^3 - 6x^2 + 2x - 6)' = 3x^2 - 12x + 2$$

$y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 2 = 0$ - приравниваем первую производную к нулю.

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 24}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{120}}{6}$$

$$x_1 = \frac{12+11}{6} \approx 3.8, \quad x_2 = \frac{12-11}{6} \approx 0.17 - \text{критические точки 1 рода.}$$

Исследуем полученные критические точки I рода (смотри рисунок 6.1): Пусть $x \in (-\infty; 0.17)$, найдем знак производной на этом интервале, подставим в производную значение $x=0$, получим $y'(0) = 0 - 0 + 2 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает. Аналогичную процедуру проделаем на двух других интервалах.

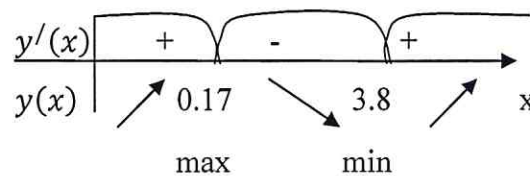


Рисунок 6.1 Интервалы монотонности функции $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$

$x \in (0.17; 3.8)$, $y'(1) = 3 - 12 + 2 < 0 \Rightarrow$ функция убывает.

$x \in (3.8; +\infty)$, $y'(4) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает. Значит $x_1 = \frac{12 + \sqrt{120}}{6} \approx 3.8$ - точка ми-

нимума. $x_2 = \frac{12 - \sqrt{120}}{6} \approx 0.17$ - точка максимума.

Найдем значение функции в критических точках.

$$y(3.8) = (3.8)^3 - 6(3.8)^2 + 2(3.8) - 6 = 54.9 - 86.6 + 7.6 - 6 = -24.1 - 6 = -30.1$$

$$y(0.17) = (0.17)^3 - 6(0.17)^2 + 2(0.17) - 6 = 0.0049 - 0.17 + 0.34 - 6 = -5.82$$

Точки с координатами: $(3.8; -30.1)$ - точка минимума; $(0.17; -5.82)$ - точка максимума

5. Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость графика.

Найдем вторую производную функции.

$$y''(x) = (3x^2 - 12x + 2)' = 6x - 12$$

$y''(x) = 0$ - приравниваем вторую производную к нулю.

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$x = 2$ - критическая точка II рода.

Исследуем полученную критическую точку II рода (смотри рисунок 6.2).

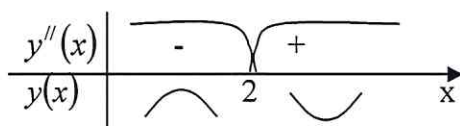


Рисунок 6.2 Интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$

Пусть $x \in (-\infty; 2)$, найдем знак второй производной в точках интервала, при $x=0$, $y''(0) = 0 - 12 < 0 \Rightarrow$ график функции выпуклый. Аналогично на втором интервале, $x \in (2; +\infty)$, $y''(3) = 18 - 12 > 0 \Rightarrow$ график функции вогнутый.

$x = 2$ - точка перегиба графика функции. Найдем значение функции в этой точке. Найдем значение функции в точке $x = 2$:

$$y(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = -18$$

Точка перегиба графика функции имеет координаты: $(2; -18)$.

6. Исследуем функцию на асимптоты:

Наклонная асимптота имеет формулу $y = kx + b$, найдем коэффициенты k, b

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 2x - 6}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 6x + 2 - \frac{6}{x} = \infty - 0 = \infty, \text{ д.é. } k = \infty \Rightarrow$$

наклонной асимптоты нет.

7. Строим график функции согласно проведенным исследованиям (смотри рисунок 6.3).

5.2. Исследуем функцию по схеме $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. Построим график.

1. Область определения функции $x-1 \neq 0$, $x \neq 1$ - точка подозрительная на разрыв.

Исследуем $x=1$ на разрыв.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(1-0)^2+1}{1-0-1} = \frac{2}{-0} = -\infty - \text{левый предел равен бесконечности, значит}$$

$x=1$ - точка разрыва II рода, следовательно $x=1$ - вертикальная асимптота.

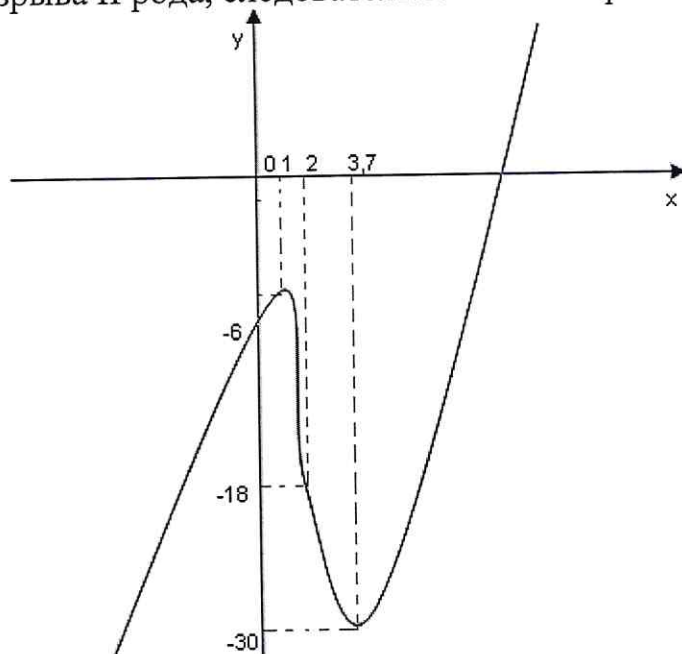


Рисунок 6.3 График функции $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$

2. Точки пересечения с осями координат: с Оу: $x=0 \Rightarrow y = \frac{0+1}{0-1} = -1$, точка пересечения с координатами (0;-1); С осью Ох:

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+1=0}{x-1 \neq 0} \Rightarrow x^2 = -1 - \text{нет действительных точек пересечения.}$$

3. Исследуем на четность и не четность

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} = \frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow \text{функция общего вида. Функция не периодичная.}$$

4. Исследуем на монотонность и экстремумы

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} \right)' = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 1)1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

Приравняем производную $f'(x)$ к нулю.

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ (x-1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_3 \neq 1$$

Найдем знак производной на полученных интервалах (смотри рисунок 6.4).

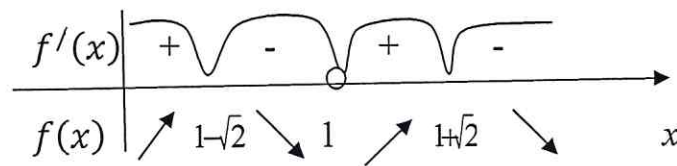


Рисунок 6. 4 Интервалы монотонности функции $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

Значит $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ - точка максимума, найдем значение функции в этой точке

$f(x_1) = 2 - 2\sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ - точка минимума, значение функции в x_2

$$f(x_2) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Точки экстремума: $(1 - \sqrt{2}; 2 - 2\sqrt{2})$ - точка максимума; $(1 + \sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2})$ - точка минимума.

5. Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость. Найдем вторую производную

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^4};$$

т.к. вторая производная не обращается в ноль, то критических точек II рода нет, но знаменатель не может обращаться в ноль, следовательно:

$$\frac{4}{(x-1)^4} \neq 0 \Rightarrow x - 1 \neq 0; x \neq 1 - \text{точка разрыва. Исследуем знаки второй производной на интервалах (смотри рисунок 6.5)}$$

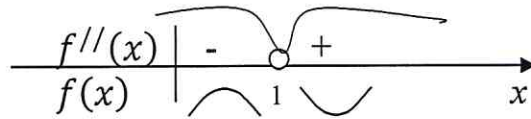


Рисунок 6. 5 Интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

На интервале $(-\infty; 1)$ - график выпуклый, так как $f''(x) < 0$ на этом интервале, а на интервале $(1; +\infty)$ - график вогнутый, так как $f''(x) > 0$ на этом интервале.

5. Исследуем на наклонные асимптоты.

$y = kx + b$ - это уравнение наклонной асимптоты, найдем неизвестные коэффициенты

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - 1x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x}{x - 1} = 1$$

Подставим в уравнение наклонной асимптоты полученные коэффициенты и получим уравнение наклонной асимптоты $y = x + 1$.

7. Построим график функции (смотри рисунок 6.6).

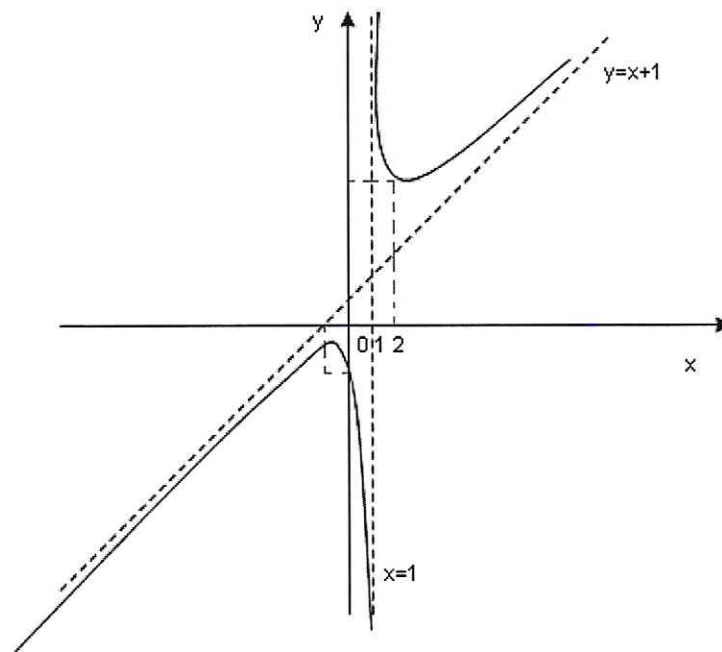


Рисунок 6.6 График функции $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

6. Контрольные вопросы:

- 6.1 Условие монотонности и экстремума функции.
- 6.2 Условие выпуклости и вогнутости графика функции.
- 6.3 Формула для нахождения асимптот

Практическая работа № 7

Тема: Нахождение неопределенных интегралов и вычисление определенных интегралов.

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по нахождению неопределенных интегралов методами: непосредственного интегрирования, заменой переменных, по частям и вычислению определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница.

Знать:

- понятие первообразной;
- понятие неопределенного интеграла;
- правила и формулы интегрирования;
- метод непосредственного интегрирования;
- метод интегрирования по частям;
- метод интегрирования заменой переменных;
- формулу Ньютона-Лейбница;
- правила интегрирования определенных интегралов.

Уметь:

- находить неопределенный интеграл методами: непосредственного интегрирования, интегрирования по частям; заменой переменных;
- вычислять определенный интеграл.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия,

2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

3.1 Повторить нахождение неопределенных интегралов методами: непосредственного интегрирования, интегрирования по частям; заменой переменных;

3.2 Повторить правила и формулы интегрирования (смотри приложение);

3.3 Повторить вычисление определенного интеграла.

4. Задание:

4.1 Найти неопределенные интегралы

а) методом непосредственного интегрирования;

б) методом замены переменных;

в) методом интегрирования по частям.

4.2 Вычислить определенные интегралы

Варианты заданий к практической работе в таблице 7.1

Таблица 7.1 Варианты заданий к практической работе.

Вариант 1 1. а) $\int (\frac{x^3}{5} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \operatorname{tg} x) dx$; $\int \cos \frac{3}{4} x dx$ б) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx$ в) $\int (x+1)e^{2x} dx$ 2. $\int_0^2 (2-x)^2 dx$; $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x} dx$	Вариант 2 1. а) $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt[3]{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}) dx$; $\int \cos \frac{3}{4} x dx$ б) $\int (1+e^{3x})^2 \cdot e^{3x} dx$ в) $\int x \cos 7x dx$ 2. $\int_0^3 (1-x)^3 dx$; $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3} dx$
Вариант 3 1. а) $\int (7x^2 - \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{1}{5x+2}) dx$; $\int \sin \frac{1}{4} x dx$ б) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x} dx$ в) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ 2. $\int_1^2 (3-x)^2 dx$; $\int_1^2 \frac{x^3+3}{2x^2} dx$	Вариант 4 1. а) $\int (3x\sqrt[3]{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{2x+1}{x^2+x+3}) dx$; $\int e^{3x} dx$ б) $\int \frac{dx}{(3+\operatorname{tg} x) \cos^2 x}$ в) $\int x \sin 5x dx$ 2. $\int_{-2}^0 (2-x)^4 dx$; $\int_1^2 \frac{3x^2-1}{x} dx$

Вариант 5 1. а) $\int \frac{x^2 - 5x - 1}{\sqrt{x}} dx; \int \sin(\frac{2}{5}x - 7) dx$ б) $\int \frac{(4 - \arcsin x)^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ в) $\int x \cdot e^{-3x+2} dx$ 2. $\int_{-1}^0 (x^3 - 2x) dx; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$	Вариант 6 1. а) $\int (\frac{12}{x^3\sqrt{x}} + 3x^2 + \frac{1}{x+4}) dx; \int e^{\frac{3x}{2}} dx$ б) $\int (6 - \arcsin x)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ в) $\int (x - 1) \cdot 2^x dx$ 2. $\int_0^2 (1 + 3x^2) dx; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos x dx$
Вариант 7 1. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x}}{2} + 2x^3 + \frac{1}{4+x^2} dx; \int e^{\frac{3x-1}{2}} dx$ б) $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx$ в) $\int (x+1) \cdot \sin 2x dx$ 2. $\int_{-1}^1 (5 - 3x^2 - x) dx; \int_0^4 2\sqrt{x} dx$	Вариант 8 1. а) $\int (\frac{4}{x^3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \operatorname{ctg} x) dx; \int 2e^{\frac{x}{6}} dx$ б) $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1 - \sin 3x}} dx$ в) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$ 2. $\int_0^1 (e^x + x) dx; \int_1^2 \frac{(2x^2+1)dx}{x}$
Вариант 9 1. а) $\int (5x\sqrt{x} + \frac{7}{x^2} + e^{8x+1}) dx; \int \cos \frac{5}{4}x dx$ б) $\int \sqrt[3]{\sin 3x} \cdot \cos 3x dx$ в) $\int x^3 \cdot \ln x dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx; \int_1^2 \frac{(x-1)dx}{x^3}$	Вариант 10 1. а) $\int (\frac{\sqrt{x}}{2} - 4x^2 + \frac{x^2}{x^3+5}) dx; \int 5e^{\frac{3x-1}{6}} dx$ б) $\int \sqrt{2 - \operatorname{tg} 3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} dx$ в) $\int \arcsin 5x dx$ 2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\sin^2 x} dx; \int_1^2 \frac{(x+4)dx}{x}$

5. Пример выполнения:

Найти неопределенные интегралы:

1. Методом непосредственного интегрирования

$$\begin{aligned}
 1. \int (\frac{2}{\sqrt{x}} + 3x^2 + \frac{x}{x^2+1}) dx &= \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx + \int 3x^2 dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx = 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 3 \int x^2 dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx = \\
 &= \left| (x^2+1)' = 2x \right|_{\text{для интеграла №3}} = 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + \int \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x}{x^2+1} dx = 2 \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} + \frac{3x^3}{3} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =
 \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по формуле} \\ \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \end{array} \right| = 4\sqrt{x} + x^3 + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C$$

2. Метод интегрирования заменой переменных $\int \frac{\sqrt{\arctg 3x}}{1+9x^2} dx =$

$$\left| \begin{array}{l} \text{решим методом замены} \\ \text{переменных, пусть} \\ t = \arctg 3x \Rightarrow \\ dt = (\arctg 3x)' dx \\ dt = \frac{1}{1+9x^2} dx \\ dx = \frac{dt}{\frac{1}{(1+9x^2)}} \Rightarrow dx = (1+9x^2)dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{t}(1+9x^2)dt}{(1+9x^2)} = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} +$$

$$C = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \left| \begin{array}{l} \text{делаем} \\ \text{обратную} \\ \text{замену, т.к.} \\ t = \arctg 3x \end{array} \right| = \frac{2}{3} \sqrt{(\arctg 3x)^3} + C$$

3. $\int (3x + 1) \cos 2x dx =$

$$\left| \begin{array}{l} \text{интегрируем по частям:} \\ \int u dv = u \cdot v - \int v du \\ u = 3x + 1 \Rightarrow du = (3x + 1)' dx \Rightarrow du = 3 dx \\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C \end{array} \right| =$$

$$= (3x + 1) \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot 3 dx = \frac{1}{2} (3x + 1) \sin 2x - \frac{3}{2} \int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} (3x + 1) \sin 2x - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + C = \frac{1}{2} (3x + 1) \sin 2x + \frac{3}{4} \cos 2x + C$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

6. Контрольные вопросы:

- 6.1 В чем заключается метод непосредственного интегрирования?
- 6.2. В чем заключается метод интегрирования по частям?
- 6.3. В чем заключается метод интегрирования заменой переменных?
- 6.4. Таблица основных интегралов.
- 6.5. Чем неопределенный интеграл отличается от определенного интеграла?
- 6.6. В чем заключается формула Ньютона – Лейбница?
- 6.7 Чему равна площадь криволинейной трапеции?

7. Приложение. Теоретический материал.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
6. $\int e^x dx = e^x + c$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
9. $\int \cos x dx = \sin x + c$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
11. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c$
12. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c$
13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$
14. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$
15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$
16. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$
17. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$
18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
20. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c$
21. $\int \frac{A dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + c$
22. $\int \frac{dx}{x^2 + px + g} = \frac{2}{\sqrt{4g - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{4g - p^2}} + c$ или
 $\int \frac{dx}{x^2 + px + g} = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c$
23. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
24. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона–Лейбница: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Основные методы интегрирования:

1. Метод непосредственного интегрирования

Этот метод заключается в том, что некоторые интегралы вычисляются (или, как говорят, берутся) с помощью свойств неопределенного интеграла, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы интегралов.

2. Интегрирование методом замены переменной

Если интеграл непосредственно вычислить не удастся, то часто путем замены переменной, где t – новая переменная, а $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, этот интеграл можно свести к интегралу, метод вычисления которого известен. При этом имеет место следующая формула:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Эту формулу часто читают «справа налево», производя подстановку не вида $x = \varphi(t)$, а вида $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x) dx$. Тогда

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(u) du$$

Подстановку $u = \varphi(x)$ следует выбирать так, чтобы данный интеграл привести к табличному.

Иначе говоря, заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

3. Формулой интегрирования по частям называют равенство

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

где u и v – непрерывно дифференцируемые функции от x . Применение этой формулы имеет целью заменить отыскание интеграла левой части отысканием интеграла правой части, когда последний проще

К числу интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, относятся, например, если $P(x)$ – многочлен, то для интегралов вида:

1) $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x) \sin x dx$, $\int P(x) \cos x dx$ - принимают за $u = P(x)$, а за $dv = e^{ax} dx \sin x dx, \cos x dx$;

2) $\int P(x) \arccos x dx$; $\int P(x) \ln x dx$, где за $dv = P(x)dx = P(x) dx$, остальную часть принимают за $u = \arcsin x, \arccos x, \ln x$.

Формула Ньютона –Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(a) - F(b)$$

Практическая работа № 8

Исследование несобственных интегралов.

1.Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по исследованию сходимости несобственных интегралов.

Знать:

- понятие несобственного интеграла;
- формулы для нахождения несобственных интегралов;
- признаки сходимости несобственных интегралов.

Уметь:

- исследовать несобственные интегралы на сходимость;
- отличать определённый интеграл от несобственного интеграла от неограниченной функции.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

- 3.1 Повторить правила нахождения пределов функции;
- 3.2 Повторить область определения функции. Точки разрыва.
- 3.3 Правила, формулы, способы интегрирования.
- 3.4 Формулу Ньютона-Лейбница.

4. Задание:

- 4.1 Исследовать сходимость несобственных интегралов по формулам;
- 4.2 Исследовать сходимость несобственных интегралов по признакам сравнения.

Варианты заданий практической работы приведены в таблице 8.1

Таблица 8.1 Варианты заданий к практической работе

Вариант 1 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \int_0^{+\infty} x e^{\frac{x}{2}} dx$ 2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^5}$	Вариант 2 1. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ 2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4}$
Вариант 3 1. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx; \int_0^{+\infty} x e^x dx$ 2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^8}$	Вариант 4 1. $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{ctg} x dx; \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ 2. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-3)^{1/3}}$
Вариант 5 1. $\int_0^1 \frac{dx}{x}; \int_0^{+\infty} 2x(x^2-1)^9 dx$ 2. $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$	Вариант 6 1. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \int_0^{+\infty} x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$ 2. $\int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^3}$

Вариант 7 1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}$; $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ 2. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{1/2}}$	Вариант 8 1. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-9}$; $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ 2. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^6}$
Вариант 9 1. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x}$; $\int_1^{\infty} \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}$ 2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^7+1}$	Вариант 10 1. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$; $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ 2. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$

5. Порядок выполнения.

Исследовать сходимость несобственного интеграла.

5.1 $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$

Решение: $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \left| \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \right|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$

Предел существует, значит интеграл сходится.

5.2 $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

Решение: Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ не ограничена в окрест-

ности точки $x = 4$, т.е. $x = 4$ - особая точка.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{4} \Big|_0^{4-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \left(\frac{4-\varepsilon}{4} - 0 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \right) = \\ &= \arcsin \left(1 - \frac{0}{4} \right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \text{ т.е. интеграл сходится.} \end{aligned}$$

5.3 Исследовать сходимость интеграла по признакам сходимости

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8+4}$

Решение: Сравним данный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8 + 4}$ с $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8}$, т.к. функции $\frac{1}{x^8 + 4} < \frac{1}{x^8}$, по

I признаку, если сходится интеграл от большей функции, то сходится интеграл от меньшей функции.

Найдём: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8} = -\frac{1}{7x^7} \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{7} + \frac{1}{\infty} = -\frac{1}{7} \Rightarrow$ интеграл сходится, а значит по I при-

знаку сходимости сходится и $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^8 + 4}$.

6. Контрольные вопросы:

6.1 Понятие несобственного интеграла. Основные формулы.

6.2 Признаки сравнения при исследовании сходимости несобственных интегралов.

6.3 В чём отличие интеграла от неограниченной функции от интеграла с неограниченным пределом интегрирования?

Практическая работа №9

Тема: Нахождение частных производных первого и второго порядка функции нескольких переменных

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по нахождению областей определения и частных производных функций нескольких переменных первого и второго порядка.

Знать:

- понятие функции нескольких переменных;
- понятие области определения функции нескольких переменных;
- понятие частных производных функции n-переменных;
- понятие порядка частной производной;
- понятие полного дифференциала.

Уметь:

- находить область определения функции нескольких переменных
- находить частный и полный дифференциал функции.

2. Литература Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе: Повторить:

- 3.1. Правила и формулы дифференцирования;
- 3.2. Кривые II порядка;
- 3.3. Понятие области определения функции одной переменной;
- 3.4. Понятие функции одной переменной;
- 3.5. Понятие частных производных и полного дифференциала.

4. Задание:

- 4.1. Найти область определения функции n -переменных.
- 4.2. Найти частные производные первого и второго порядка функции n -переменных.
- 4.3. Найти полный дифференциал функции.

Варианты заданий практической работы приведены в таблице 9.1

Таблица 9.1 Варианты заданий к практической работе

Вариант 1 1. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ 2. $u = x^2 + 4x + 5y^3 - x^2y^4$ 3. $u = 5^{x^2+y^2} + z^{2x}$	Вариант 2 1. $u = \arcsin(x + y)$ 2. $u = 3x - 2y + 5x^4 - 7x^2y^3$ 3. $u = 3^{y^2+z} - x^7$
Вариант 3 1. $u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 2. $u = x^4 - 7y^5 + 12xy^4 + 3$ 3. $u = e^{y^2+x} + x^z$	Вариант 4 1. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ 2. $u = -y^7 + 5x^2 - 2x^2y^4$ 3. $u = \sin(x^2 + y^2) + z^{x^2}$

Вариант 5 1. $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$ 2. $u = 3x^2y^5 - 2x^5 + 7y + 8$ 3. $u = \cos(y^2 + x) + x^{z^3}$	Вариант 6 1. $u = \ln(-x + y)$ 2. $u = 31x^2y^3 - y^2 + 2x + 5$ 3. $u = e^{x^3+y^3} - z^{x^2}$
Вариант 7 1. $u = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$ 2. $u = 5x - 7y^2 + 12x^2y^6 + 1$ 3. $u = \sin(x + y) + x^{z^2}$	Вариант 8 1. $u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$ 2. $u = 3y^4 - 5x + 8xy^7 + 5$ 3. $u = e^{\frac{x}{y}} + z^{x^2+2}$
Вариант 9 1. $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ 2. $u = 12y + 5x^2 - 2x^4y^2 + 7$ 3. $u = z^{x^2} + 2^{x^2+y^2}$	Вариант 10 1. $u = \arcsin\left(\frac{y}{x^2}\right)$ 2. $u = 21x - 3y^2 + 5y^6x + 8$ 3. $u = 4^{x^2+y} + z^{2y}$

5. Порядок выполнения:

5.1. а) Найти область определения функции $u = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right)$

Решение: Эта функция определена, если $y^2 \neq 0$ и $-1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 1$, уменьшим двойное неравенство, $\Rightarrow -y^2 \leq x \leq y^2$, а т.к. $y \neq 0 \Rightarrow -y^2 \leq x \leq y^2$ областью определения функции является часть плоскости, заключенная между двумя параболлами $y^2 = x$ и $y^2 = -x$, за исключением $O(0;0)$.

б) Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Решение: Функция z принимает действительные значения, если $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ т.е. $-x^2 - y^2 \geq -4$ делим на (-1) обе части неравенства, знак неравенства меняется на противоположный, получаем $x^2 + y^2 \leq 4$. Областью определения

данной функции z является круг радиуса $r = 2$ с центром в начале координат, включая границу окружности.

5.2. Найти частные производные первого и второго порядка функции нескольких переменных $u = 5x^2 - 10y + 2x^2y^3 + 7$.

Решение: Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (5x^2 - 10y + 2x^2y^3 + 7)'_x = 10x - 0 + 4y^3x + 0 = 10x + 4y^3x$$

$y - \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (5x^2 - 10y + 2x^2y^3 + 7)'_y = 0 - 10 + 6x^2y^2 + 0 = -10 + 6x^2y^2$$

$x - \text{const}$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (10x + 4y^3x)'_x = 10 + 4y^3$$

$y - \text{const}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (10x + 4y^3x)'_y = 0 + 4x \cdot 3y^2 = 12xy^2$$

$x - \text{const}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-10 + 6x^2y^2)'_y = 0 + 6x^2 \cdot 2y = 12x^2y$$

$x - \text{const}$

5.3. Найти полный дифференциал функции $u = e^{x^2+y^2} + z^x$

Решение: Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (e^{x^2+y^2} + z^x)'_x = e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x + z^x \cdot \ln z \cdot (x)'_x = 2x \cdot e^{x^2+y^2} + z^x \ln z$$

$y, z - \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (e^{x^2+y^2} + z^x)'_y = e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_y + 0 = 2ye^{x^2+y^2}$$

$x, z - \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (e^{x^2+y^2} + z^x)'_z = 0 + x \cdot z^{x-1} = x \cdot z^{x-1}$$

$x, y - \text{const}$

Найдем полный дифференциал функции

$$du = (2x \cdot e^{x^2+y^2} + z^x \ln z)dx + (2ye^{x^2+y^2})dy + (x \cdot z^{x-1})dz.$$

6. Контрольные вопросы:

- 6.1. Понятие области определения функции n -переменных.
- 6.2. Понятие функции n -переменных.
- 6.3. Понятие частных производных функции n -переменных.
- 6.4. Чем отличается частная производная по x от частной производной по y от функции $z = f(x; y)$?

7. Приложение. Теоретический материал

Определение: Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются *смешанными*. Если они

непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования (они равны).

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высокого порядка.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = x^2 + 3x\sqrt{y} - y + \frac{y^2}{x}.$$

Решение.

Воспользуемся результатами, полученными в примере 3.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(2x + 3\sqrt{y} - \frac{y^2}{x^2} \right)'_x = (2x)'_x + (3\sqrt{y})'_x - (y^2 x^{-2})'_x = 2 + \frac{2y^2}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{3x}{2\sqrt{y}} - 1 + \frac{2y}{x} \right)'_y = \left(\frac{3}{2} x y^{-\frac{1}{2}} \right)'_y + \left(\frac{2}{x} y \right)'_y = -\frac{3x}{4y\sqrt{y}} + \frac{2}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2x + 3\sqrt{y} - \frac{y^2}{x^2} \right)'_y = (2x)'_y + (3\sqrt{y})'_y - \left(\frac{1}{x^2} \cdot y^2 \right)'_y = \frac{3}{2\sqrt{y}} - \frac{2y}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{3x}{2\sqrt{y}} - 1 + \frac{2y}{x} \right)'_x = \left(\frac{3}{2\sqrt{y}} x \right)'_x + \left(2y \frac{1}{x} \right)'_x = \frac{3}{2\sqrt{y}} - \frac{2y}{x^2}.$$

Определение: Полным дифференциалом dz функции $z = f(x, y)$ называется главная, линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения этой функции Δz .

Функция, обладающая непрерывными частными производными, заведомо имеет полный дифференциал. Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Рекомендуемая литература

- 1) Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.
- 2) Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.
- 3) Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 – х частях. Ч.1: Учебное пособие для вузов./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко- 7-е изд., испр.,- М.: Мир и образование, 2015г., 368с.: ил.
- 4) Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 – х частях. Ч.2: Учебное пособие для вузов./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко- 7-е изд., испр.,- М.: Мир и образование, 2015г., 448с.: ил.
- 5) Алашеева, Е. А. Математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие. Ч. 2 / Е. А. Алашеева ; ПГУТИ, Каф. ВМ. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 2,72 Мб). - Самара : ИНУЛ ПГУТИ, 2017. - Загл. с титул. экрана. - Электрон. версия печ. издания 2017 г. - Режим доступа: http://ellib.sibsutis.ru/irbis64r_12/test/index.html?param1=elib.psuti.ru/Alasheeva_Matematika_Tsh2_utchebnoe_

posobie.pdf, по паролю.

Сборники задач

- 1) Растопчина О.М. Высшая математика [Электронный ресурс] : практикум / О.М. Растопчина. — Электрон. текстовые данные. — М. : Московский педагогический государственный университет, 2017. — 138 с. — 978-5-4263-0534-2. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/72486.html>

Справочники

- 1) Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. -М.: Издательство АСТ, 2008.-991 с..
- 2) Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1: Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 360 с.

Интернет-ресурсы

- 1) Курс высшей математики. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Е. Богданов [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Институт водного транспорта имени Г.Я. Седова – филиал «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2014. — 99 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/57345.html>
- 2) Информационно-справочная система «В помощь студентам». Форма доступа: <http://window.edu.ru>
- 3) <http://old.exponenta.ru/EDUCAT/class/courses/student/ma/examples.asp>
(Курс математического анализа)