

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ
И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»
(СибГУТИ)
ХАБАРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОКОММУНИКАЦИЙ (ФИЛИАЛ)
(ХИИК СибГУТИ)
СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ
по элективному курсу

Практический курс по математике
для студентов специальности
09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Хабаровск
2022

Райлян М.Н. Сборник заданий по элективному курсу «Практический курс по математике» для студентов 1 курса специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» среднего профессионального образования. – г. Хабаровск, ХИИК СибГУТИ; 2022 год

Сборник заданий содержит различные упражнения, в том числе алгебраические выражения, тождества, уравнения, неравенства, задания практико-ориентированного характера и другие задания. Весь материал логически подобран в соответствии с требованиями ФГОС СПО. Сборник заданий может быть использован как для занятий под руководством преподавателя, так и для самостоятельной работы.

Для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование СПО.

Рецензент: Калиниченко Ю.А. – преподаватель высшей категории ХИИК СибГУТИ

Рассмотрено на заседании ПЦК ИСП ХИИК СибГУТИ
протокол № 3 от 01.11.2022 г.

Председатель ПЦК ИСП О.В. Диденко

г. Хабаровск, 2022год

СОДЕРЖАНИЕ

§1. Преобразование алгебраических выражений	4
§2. Погрешность вычислений	8
§3. Решение алгебраических уравнений и неравенств и систем линейных уравнений	10
§4. Преобразование степеней	14
§5. Логарифмы	15
§6. Тригонометрические преобразования	17
§7. Комплексные числа	22
§8. Производная функции и интеграл	25
§9. Система координат на плоскости и в пространстве	31
§10. Функции и графики	33
Список использованных источников	37

§1. Преобразование алгебраических выражений

1. Представить число в виде конечной десятичной дроби.

1) $1\frac{1}{2}$;

2) $\frac{3}{4}$;

3) $\frac{3}{8}$;

4) $-2\frac{2}{5}$;

5) $1\frac{7}{10}$;

6) $-\frac{7}{20}$;

7) $\frac{8}{25}$;

8) $\frac{19}{50}$;

9) $3\frac{3}{200}$;

10) $-\frac{17}{8}$;

11) $\frac{11}{16}$;

12) $\frac{23}{80}$.

2. Представить число в виде рациональной дроби.

1) 0,6

2) 2,3;

3) -1,7;

4) 0,24;

5) -0,375;

6) 0,85;

7) 2,72;

8) 3,725;

9) 0,448;

10) 1,625.

3. Выполнить сложение и вычитание дробей.

1) $3\frac{5}{8} - 2\frac{11}{12}$;

2) $1\frac{3}{16} - 2\frac{7}{24}$;

3) $\frac{1}{3} + 0,75$;

4) $0,8 - \frac{11}{12}$;

5) $3,4 + \frac{7}{4}$;

6) $\frac{13}{14} - \frac{15}{49}$;

7) $4\frac{3}{24} - 3\frac{17}{54}$.

4. Выполнить умножение и деление дробей.

1) $1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{14}$;

2) $3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{5}{22}$;

3) $1\frac{4}{13} \cdot 2\frac{3}{5}$;

4) $1\frac{11}{24} \cdot 1\frac{17}{25}$;

5) $\frac{5}{7} \div 1\frac{3}{7}$;

6) $4\frac{5}{7} \div 1,1$;

7) $2\frac{11}{12} \div 1\frac{1}{6}$;

8) $2\frac{8}{9} \div 1\frac{1}{12}$;

5. Сократить дроби

1) $\frac{5a}{15ab}$;

2) $\frac{-6x^2y}{18xy^2}$;

3) $\frac{63xy^5}{-81x^2y^2}$;

4) $\frac{63a^2b}{14a^3b^2}$;

5) $\frac{2x+14}{8}$;

6) $\frac{3x^2-6x+99}{6}$;

7) $\frac{5x-15}{5(x^2+1)}$;

8) $\frac{4x^2+8x+52}{12(x^2-7)}$.

6. Разложить на множители и сократить дроби.

1) $\frac{9(x+5)^2}{6(x+5)^3};$

2) $\frac{7x-14y}{3x-6y};$

3) $\frac{x-2b}{x^2-2bx};$

4) $\frac{3c-9b}{6d-2c};$

5) $\frac{m^3-5m^2n}{5n^3-mn^2}.$

7. Упростить выражение.

1) $\frac{2a+2b}{b} \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} \right);$

2) $\left(\frac{3b^2+2b}{b^2-4} - \frac{2b}{b-2} \right) \div \frac{2b}{b+2};$

3) $\left(\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab} + \frac{b}{a+b} \right) \cdot \frac{a}{a+b};$

4) $\left(\frac{4x}{x^2-y^2} - \frac{4}{x+y} \right) \div \frac{y}{x-y};$

5) $\frac{x+y}{y} \left(\frac{x}{x+y} - \frac{x-y}{x} \right);$

6) $\frac{a-1}{a^2} \cdot \frac{ax-a}{a-1} + \frac{1-x}{2a};$

7) $b - \frac{2a}{a-b} \cdot \frac{a^2-b^2}{4a};$

8) $\left(\frac{m+n}{m} - \frac{m+n}{n} \right) \cdot \frac{m}{m+n};$

9) $\left(y + \frac{4y+1}{y-2} \right) \cdot \frac{1}{y+1};$

10) $\frac{b}{a-b} \div \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a+b}{a} \right);$

11) $\left(\frac{3c+1}{c-1} + c \right) \cdot \frac{1}{c+1};$

12) $\left(\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b} \right) \div \frac{a}{a-b};$

8. Представить в виде периодической дроби.

1) $\frac{1}{3};$

2) $\frac{5}{6};$

3) $\frac{4}{9};$

4) $1\frac{2}{3};$

5) $\frac{5}{12};$

6) $\frac{5}{7};$

7) $\frac{13}{18};$

8) $\frac{17}{24};$

9. Представить в виде рациональной дроби.

1) 0,(6);

2) 1,(5);

3) 0,(37);

4) 2,(27);

5) -1,(69);

6) 0,0(3);

7) 1,1(4);

8) 0,3(1);

10. Выполнить действия.

1) $\left(\frac{13}{7} - 0,2 \right) \cdot 1\frac{13}{29} + 0,6;$

2) $\left(\frac{7}{6} + 2,3 \right) \cdot 1\frac{2}{13} - 2;$

- 3) $\left(1\frac{3}{5} - \frac{3}{4}\right) \div \left(1\frac{3}{20} + 2,6\right) + \frac{58}{75};$ 4) $\left(1\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2\frac{3}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{42};$
 5) $\frac{\left(140\frac{7}{30} - 138\frac{5}{12}\right) \div 18\frac{1}{6}}{0,002};$ 6) $\frac{\left(95\frac{7}{30} - 93\frac{5}{18}\right) \cdot 2\frac{1}{4} + 0,6}{0,2};$
 7) $\left(\left(2,15 - 1\frac{5}{16}\right) : 33,5 + 5\frac{1}{7} \cdot 3,85 - 15,7\right) \cdot \frac{8}{11} + 2,25$
 8) $\left(75 : 4\frac{1}{6} - 3\frac{1}{6} - 3\frac{9}{23} \cdot 3\right) \cdot \left(1\frac{5}{18} + 0,35 - \frac{11}{15}\right) : 1,4$
 9) $\left(3\frac{1}{3} \cdot 6,6 + 2 : 12,75\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{20}{51} + 1\frac{16}{17}\right) : 2,5$

11. Разложить на множители и сократить дробь.

- 1) $\frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2};$ 2) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 12};$ 3) $\frac{3x^2 + x - 4}{x^2 - 2x + 1};$
 4) $\frac{4x - x^2 - 3}{3x^2 - 2x + 1};$ 5) $\frac{8 - 2x - x^2}{4x^2 - 5x - 6};$ 6) $\frac{\frac{1}{2}x^2 - x - 12}{7x - 2x^2 + 30}.$

12. Упростить выражение.

- 1) $\left(\frac{2a^2 - a}{a^2 - a + 1} - 2\right) \div \left(\frac{1}{a+1} - \frac{a-1}{a^2 - a + 1}\right);$
 2) $\left(\frac{a}{a-5} - \frac{a}{a+5} - \frac{a^2 + 25}{25 - a^2}\right) \cdot \frac{a-5}{a^2 + 10a + 25};$
 3) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy} - \frac{1}{x^2-4y^2} \div \frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right) \cdot \frac{(x+2y)^2}{4y^2};$
 4) $\left(\frac{2y}{x^2-4y^2} + \frac{1}{2y-x}\right) \div \left(\frac{2y}{x+2y} - \frac{4y^2}{x^2+4y^2+4xy}\right);$
 5) $\left(\frac{1}{a+2ab+b^2} - \frac{1}{a^2-2ab+b^2}\right) \cdot \frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{ab};$
 6) $\frac{2a^2-a-1}{a^2-1} - \frac{a}{a^2-1} \div \frac{a}{a-1} - \frac{a-1}{a+1};$

$$7) \frac{3a}{a^2-9} - \frac{3}{a^2-9} : \left(\frac{a+2}{3a-3} - \frac{1}{a-1} \right)$$

$$8) \frac{a^2}{3+a} \cdot \frac{9-a^2}{a^2-3a} + \frac{27+a^3}{3-a} \div \left(3 + \frac{a^2}{3-a} \right);$$

$$9) \frac{y^2}{y^2-1} + \frac{1}{y^2-1} : \left(\frac{2}{2y-y^2} - \frac{1}{2-y} \right);$$

$$10) \frac{2m}{m^2-4} - \frac{2}{m^2-4} : \left(\frac{m+1}{2m-2} - \frac{1}{m-1} \right)$$

13. Выполнить действия с десятичными дробями, не используя калькулятор.

А. Сложение

$$1) 15,0084 + 0,4548;$$

$$2) 2,773 + 78,73;$$

$$3) 4,929 + 0,0762;$$

$$4) 0,5867 + 0,4133;$$

$$5) 2,878 + 47,122;$$

$$6) 23,08 + 95,884;$$

$$7) 0,0065 + 71;$$

$$8) 92,02 + 94,98;$$

$$9) 0,001084 + 6,247;$$

$$10) 4 + 3,7305;$$

Б. Умножение

$$1) 0,045 \cdot 0,0672;$$

$$2) 100 \cdot 0,0668;$$

$$3) 0,0001 \cdot 611;$$

$$4) 645 \cdot 6,4;$$

$$5) 0,00998 \cdot 9,4;$$

$$6) 0,25 \cdot 756;$$

$$7) 0,034 \cdot 48;$$

В. Деление

$$1) 0,0696 : 0,00001;$$

$$2) 5,445 : 0,099;$$

$$3) 632 : 395;$$

$$4) 0,6956 : 0,074;$$

$$5) 360 : 100000;$$

$$6) 0,00095 : 0,0001;$$

$$7) 0,108852 : 12;$$

$$8) 3 : 96;$$

$$9) 2421 : 4,5;$$

$$10) 415,87 : 91.$$

Г. Вычитание

$$1) 17,013 - 3,013;$$

$$2) 8,535 - 0,8535;$$

$$3) 2,38268 - 0,61268;$$

$$4) 0,0072816 - 0,00723;$$

$$5) 225,9791 - 223,1;$$

$$6) 26 - 0,0914;$$

$$7) 2,1029 - 2,025;$$

8) $25 \cdot 9,7$;

8) $19,081 - 4,9017$;

9) $0,1 \cdot 1,5$;

9) $0,14766 - 0,04922$;

10) $59,2 \cdot 2,5$;

10) $1276,4 - 8,8323$;

14. Выполнить действия с десятичными дробями, не используя калькулятор.

1) $9,84 - 16,32 (8 - 7,45) + 2,186$;

2) $(2,12 + 1,07) \cdot (2,12 - 1,07)$;

3) $40 - (7,12 + 11,043 : 2,7)$;

4) $7,371 : (5 - 3,18) + 2,05 \cdot (17,82 - 7)$;

5) $27,5967 : (8 - 1,186) + 3,02$;

6) $(4,694 - 3,998) : 4,35 + (4,5 \cdot 5,4 - 0,06)$;

7) $(4,6 \cdot 3,5 + 15,32) : 31,42 + (7,26 - 5,78) : 0,148$;

8) $(101,96 - 6,8 \cdot 7,2) : 4,24 - 3,4 \cdot (10 - 6,35)$;

9) $51,328 : 6,4 + 3,2 \cdot (10 - 4,7) \cdot 2,05$;

10) $86,4 \cdot (17,01 : 4,2) : 6,4$;

11) $42,26 - 34,68 : (33,32 : 9,8)$;

12) $12,6 : (2,04 + 4,26) - 0,564$;

13) $(5,2 : 26 + 26 : 5,2) \cdot 6,1 + 5,25 : 5$;

14) $(20 - 13,7) \cdot 7,4 + 18 : 0,6$;

15) $7,72 \cdot 2,25 - 4,06 : (0,824 + 1,176) - 12,423$;

16) $(42,12 \cdot 0,12 + 112,016 \cdot 0,1) : 1,6 - 9,424$;

17) $((4,2 \cdot 0,81 - 6,8 \cdot 0,05) : 0,5) : 200$;

18) $2,6 \cdot (4,4312 + 15,5688) - 6,66 : (8,2 - 6,72)$.

§2. Погрешность вычислений

15. Граница абсолютной погрешности приближенного значения 486 числа x равна 0,5. Укажите границы, в которых заключено число x .

16. Найдите границу абсолютной погрешности измерений, полученных в виде неравенства $27 < x < 28$.
17. Площадь круга равна $37,5 \pm 0,2$ (см²). Найдите границы измерения площади круга.
18. Вычислите относительную погрешность числа $\pi \approx 3,14$, считая $\pi \approx 3,1416$.
19. Найдите абсолютную погрешность округления до единиц числа: 1) 0,8; 2) 7,6; 3) 19,3; 4) 563,58.
20. Округлите с наименьшей погрешностью до тысячных, сотых и десятых число: 1) 0,2373; 2) 3,35779; 3) 14,00281; 4) 5,326.
21. Электрическая цепь состоит из трех последовательно соединенных проводников с сопротивлениями $r_1 = 4,8 \pm 0,05$ (Ом), $r_2 = 6,25 \pm 0,005$ (Ом), $r_3 = 7,725 \pm 0,0005$ (Ом). Вычислите общее сопротивление цепи R по формуле $R = r_1 + r_2 + r_3$. Найдите абсолютную ΔR и относительную ϵ_R погрешности.
22. Вычислите разность $a = \sqrt{13} - \sqrt{5}$ с четырьмя значащими цифрами. Найдите абсолютную Δa и относительную ϵ_a погрешности.
23. Найдите относительную погрешность при вычислении объема куба, если приближенное значение длины ребра куба равно $3,8 \pm 0,05$.
24. С какой точностью следует измерить сторону квадрата, чтобы относительная погрешность не превышала 0,3% ? Приближенное значение стороны квадрата равно 6 (м).
25. Найдите произведение чисел $0,456 \pm 0,0005$ и $3,35 \pm 0,005$ и относительную погрешность произведения.

§3. Решение алгебраических уравнений и неравенств и систем линейных уравнений.

26. Решить уравнение.

1) $4x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 57;$

2) $\frac{5(x+1)}{8} - \frac{2(x-1)}{11} - \frac{x-3}{2} = 9;$

3) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{9} = 13;$

4) $\frac{x-3}{4} - \frac{x-4}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x-1}{8};$

5) $\frac{7+9x}{4} - \frac{2-x}{9} = 7x + 1;$

6) $5(x+5) + 3(x+2) - 7(x+6) = x;$

7) $5(x+5) + 3(x+2) - 7(x+4\frac{3}{7}) = x;$

8) $6x - 8 = 10x - (4 - x);$

9) $3 + x = 8x - (3x + 7);$

10) $\frac{x+2}{x-8} - \frac{x-1}{x-8} = \frac{3}{2};$

11) $\frac{4x}{x+5} - \frac{x}{x-1} = 3;$

12) $\frac{5x-2}{2x-3} - \frac{19}{4x-6} = \frac{7}{2};$

13) $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-6} + \frac{1}{x-8} = 0;$

14) $\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1};$

15) $\frac{3x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1;$

16) $\frac{2x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = 5.$

27. Решить неравенства.

1) $x + 6 > 2 - 3x;$

3) $\frac{2x-1}{5} - 3x > \frac{10x+1}{5};$

5) $\frac{7-6x}{2} + 10x < \frac{20x+1}{3} + 2;$

7) $\frac{1}{2} - \left(\frac{x-1}{4} - \frac{2x+1}{9} \right) > \frac{x+3}{4} - \frac{x-4}{9}$

9) $x^2 > 1;$

10) $\frac{1}{2}x^2 \geq 18;$

2) $3x - 6 \geq 4x - 9;$

4) $-1 \leq \frac{6+2x}{4} \leq 0;$

6) $\frac{x-3}{4} - 5x > \frac{6x-4}{3} - 2;$

8) $x - \frac{1-x}{6} \leq \frac{2x-1}{2} - \frac{3}{4}$

11) $x^2 < 9;$

12) $x^2 \leq \frac{1}{64};$

28. Решить неравенства.

- | | | |
|------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 + 2x \geq 0$; | 2) $3x - x^2 > 0$; | 3) $25x^2 - 36x \leq 0$; |
| 4) $3x + 2x^2 < 0$; | 5) $7x^2 + 4x > 0$; | 6) $5x - 7x^2 > 0$. |

29. Решить неравенства.

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1) $(x-1)(x+2) > 0$; | 2) $(x+3)(x-7) < 0$; |
| 3) $(x+5)(x-6) \geq 0$; | 4) $(x+4)(x-5) \leq 0$; |
| 5) $(5x-3)(2-x) > 0$; | 6) $(2x+7)(8-2x) \leq 0$; |
| 7) $-(4x-5)(3+x) \geq 0$; | 8) $(6-5x)(3-9x) < 0$; |
| 9) $x(x+2) \leq 0$; | 10) $-10x(2-15x) > 0$; |
| 11) $(1-\sqrt{2x})(1+\sqrt{2x}) > 0$; | 12) $x^2 - x - 90 > 0$; |
| 13) $6x^2 - 7x + 2 \leq 0$; | 14) $-x^2 - 2x + 48 < 0$; |
| 15) $8x^2 + 10x - 3 \leq 0$; | 16) $25x^2 - 10x + 122 > 0$; |
| 17) $-49x^2 + 28x \geq 4$; | 18) $-x^2 - 13x - 170 < 0$; |
| 19) $4x^2 - 4x + 5 < 0$; | 20) $2x^2 - 3x - 170 < 0$; |

30. Решить задачу на составление квадратного уравнения.

- 1) Числитель дроби на 2 меньше ее знаменателя. Если сложить ее с обратной ей дробью, то их сумма составит $\frac{34}{15}$. Найдите эту дробь.
- 2) Найдите двузначное число, если известно, что цифра его единиц на 2 больше цифры его десятков и что произведение числа на сумму его цифр равно 144.
- 3) Периметр прямоугольника равен 42 см, а длина его диагонали равна 15 см. Вычислите длины сторон прямоугольника.
- 4) Площадь прямоугольника равна 192 см^2 , а его периметр равен 56 см. Вычислите длины сторон прямоугольника.

5) Из листа железа прямоугольной формы сделана коробка (без крышки), объем которой равен 750 см^3 . Для этого по углам листа вырезаны квадраты со стороной, равной 5 см, и получившиеся края загнуты. Найдите размеры листа железа, если одна из его сторон на 5 см больше другой.

6) Сумма длин окружностей переднего и заднего колес повозки равна 5 м. На протяжении 60 м переднее колесо сделало на 9 оборотов больше, чем заднее на протяжении 63 м. Найдите длины окружностей l_1 и l_2 колес.

31. Решить уравнение.

$$1) \frac{3}{x} = \frac{2}{3-x};$$

$$2) \frac{5}{2x-1} = \frac{2}{3x+2};$$

$$3) \frac{4}{3x-1} = \frac{3}{2x+5};$$

$$4) \frac{2}{4-3x} = \frac{1}{5x+4};$$

$$5) \frac{-3}{x+1} = \frac{2}{3(x-2)};$$

$$6) \frac{2}{5-2x} = \frac{3}{2(x+4)}.$$

32. Решить уравнение.

$$1) \frac{2x+1}{3-x} = \frac{4-x}{x+1};$$

$$2) \frac{3x-2}{x+3} = \frac{2x}{3x-1};$$

$$3) \frac{5-x}{2x+1} = \frac{3x-3}{x+2};$$

$$4) \frac{2x-3}{x+4} = \frac{4x-6}{5x-1};$$

33. Решить неравенства.

$$1) \frac{x-2}{2x+3} \geq 0;$$

$$2) \frac{5x+1}{2-x} > 0;$$

$$3) \frac{2x+3}{3x-2} \leq 0;$$

$$4) \frac{3(x^2+4)}{x-5} \leq 0;$$

$$5) \frac{x+3}{-2(x^2+7)} > 0;$$

$$6) \frac{4-3x}{2x+7} \leq 0;$$

$$7) \frac{x+8}{5-3x} \geq 0;$$

$$8) \frac{3x+7}{x-2} < 0.$$

34. Решить неравенства.

$$1) \frac{(x-2)(3-2x)}{x+4} \geq 0;$$

$$2) \frac{2(x-4)}{(3x+2)(3x-2)} \leq 0;$$

$$3) \frac{(5-4x)(x+2)}{3-x} < 0;$$

$$4) \frac{(4+3x)}{(3+2x)(x+5)} > 0;$$

$$5) \frac{x^2-4}{(x+3)(x-1)} \geq 0;$$

$$6) \frac{(2x-3)(2x+3)}{16-x^2} \leq 0;$$

35. Решить неравенства.

$$1) \frac{x^2+3x}{5x-3} \geq 0;$$

$$2) \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \leq 0;$$

$$3) \frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4-3x-x^2} \geq 0;$$

$$4) \frac{(x-3)(x-x^2-1)}{x^2-2x+1} \geq 0;$$

$$5) \frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-2)} > 0;$$

$$6) \frac{(x^2-x+5)(x-2)}{(x+1)^2} \leq 0;$$

$$7) \frac{(x-2x^2-5)x^2}{(x^2-4)} \leq 0;$$

$$8) \frac{(x^3+8)(1-x)^2}{x^2-5x-14} \geq 0;$$

$$9) \frac{(x^3-27)(x^2-3x+2)}{x^2} \leq 0;$$

$$10) \frac{(x+1)(x^2-4x+4)}{5-x} \leq 0.$$

36. Решить систему уравнений.

$$1) \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 7x + y = -16 \\ y - 2x = -1 \end{cases}$$

37. Решить систему уравнений способами алгебраического сложения, подстановки, графическим и методом Крамера.

$$1) \begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 8x + 4y = 7 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ 9y - 6x = 9 \end{cases}$$

38. Если увеличить ширину прямоугольной площадки на 4 м, а ее длину уменьшить на 2 м, то ее площадь увеличится на 8 м²; если же ширину уменьшить на 3 м, а длину увеличить на 1 м, то ее площадь уменьшится на 23 м². Найдите ширину и длину площадки.

39. Величина одного из углов треугольника равна 50°, а разность значений двух других углов равна 10°. Найдите углы треугольника.

40. Сумма 5% числа a и 4% числа b составляет 16, а сумма 6% числа a и 8% числа b составляет 24. Найдите искомые числа a и b .

§4. Преобразование степеней

41. Вычислить без помощи калькулятора

$$1) \left(2^{-3} + \left(\frac{3}{4} \right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \div \left(\left(\frac{1}{6} \right)^0 - 12 \div 3^{-3} \right) \cdot 18;$$

$$2) \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{-1} - \left(\frac{4}{3} \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot 3;$$

$$3) \left(3 \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} + 4^{-1} \right) \div \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{5} \right)^{-1} \right);$$

$$4) \left(\left(\frac{4}{5} \right)^0 - (0,1)^{-1} \right) \div \left(\left(\frac{3}{8} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} \right);$$

$$5) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{-2} - 5 \cdot 2^{-2} + \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \right) \div (3^0 + 2^{-2});$$

$$6) \left(\left(\frac{3}{4} \right)^2 - 4^{-2} \right) \div \left(\left(\frac{5}{6} \right)^0 + \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} \right);$$

$$7) \left((3^{-1/4})^8 + \left(\frac{3}{2} \right)^0 \right)^{-2};$$

$$8) \left(33 \cdot (4^{1/4})^{-12} + \frac{(-2)^{-5}}{2} \right)^{-3};$$

$$9) \left((6^{4/3})^{3/2} + (0,25)^{-1} \right) \cdot (-0,5)^3;$$

$$10) \left((2^{-10})^{-1/2} - 7(-0,5)^{-2} \right)^{-1};$$

$$11) \left(630 \cdot \left(\frac{1}{0,2} \right)^{-1} - (7^{-4/5})^{-5/2} \right) \cdot (-11)^{-1};$$

$$12) \left(4 \cdot (4^{3/2})^{-4/3} + 3 \left(\frac{1}{0.125} \right)^{-1} \right)^{-1};$$

$$13) \left(-2^{-5} + 9 \cdot (2^{-15})^{1/3} + (\sqrt{20}) \right)^{-1};$$

$$14) \left((5^{7/4})^{8/7} - \frac{(2^{-3})^{-2}}{32} \right) \cdot (46)^{-1};$$

$$15) \frac{3 \cdot 2^7 \cdot 4^5 \left(\frac{1}{32} \right)^2 + \frac{2^5}{4}}{245}.$$

42. Выполнить действия с буквенными выражениями с рациональными степенями.

- 1) $\frac{(x^{5/8})^4}{\sqrt[3]{x^4}}$;
- 2) $\sqrt[4]{27a \cdot \sqrt[4]{3a^3}}$;
- 3) $\frac{\sqrt[5]{192t}}{6t^{11}}$;
- 4) $\frac{(n^{1/4})^{4/3}}{\sqrt{n^3}}$;
- 5) $\sqrt[3]{9c^5 \cdot \sqrt[3]{3c^4}}$;
- 6) $\sqrt[4]{8a^3 \cdot \sqrt[4]{2a^5}}$;
- 7) $(b^{5/6})^3 \cdot \sqrt[4]{b^3}$;
- 8) $\frac{\sqrt[4]{y^3}}{(y^{1/3})^{9/2}}$;
- 9) $\frac{b^{-5,6}}{11b^{0,4}}$;
- 10) $(a^{-1}b^2)^{2/3}$;
- 11) $(a^3b^{1/2})^{-3/7}$
- 12) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-1}$;
- 13) $\left(\frac{x^{-2}}{y^{5/3}z^{-1}}\right)^{1/2}$;
- 14) $\frac{(y^{2/7}y^{0,5})^2}{y^2}$;
- 15) $\frac{a^{3/4}}{(a^{0,3})}$;
- 16) $\frac{(m^{2/3}m^{-1/4})^6}{m^{0,5}}$;
- 17) $\left(m^{-\frac{1}{7}}\right)^{\frac{2}{3}} \div m^{-\frac{1}{3}}$;
- 18) $(n^{2/3} \cdot n^{1/6})^4 \cdot n$;
- 19) $(n^{6/7} \div n^{-1})^7 \cdot n$;
- 20) $\sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{27b}$;
- 21) $\sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[4]{b^5c^2}$;
- 22) $\sqrt[5]{a^3b^2} \cdot \sqrt[5]{3a^2b^3}$;
- 23) $\frac{\sqrt[4]{8x^2y^5} \sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}$.

§5. Логарифмы

43. Вычислить

- 1) $\lg 5 + \lg 2$;
- 2) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$;
- 3) $\log 8 + \log 125$;
- 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$;
- 5) $\log_2 15 + \log_2 \frac{15}{16}$;
- 6) $\log_5 75 + \log_5 3$;
- 7) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 4$;
- 8) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$;
- 9) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$;
- 10) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$;

11) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$;

12) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$.

44. Вычислить, используя свойства логарифма.

1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 20$;

3) $\log_3 12 - \log_3 5 + \log_3 21$;

4) $2\log_4 12 + \log_4 8 + \log_4 6$;

5) $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 15 + \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$;

6) $\frac{2}{3}\lg 0,001 + \lg \sqrt{1000} - \frac{3}{5}\lg \sqrt{10000}$;

45. Вычислить, используя формулу перехода к новому основанию.

1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$;

2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$;

3) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$;

4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$.

46. Вычислить.

1) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$;

2) $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$;

3) $\frac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$;

4) $\frac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$.

47. Выразить данный логарифм через логарифм с основанием 7.

1) $\log_5 3$;

2) $\lg 6$;

3) $\log_7 2$

4) $\log_5 \frac{1}{3}$

5) $\ln 7$

48. Дано равенство $\log_3 17 = m$.

Найти: $\log_3 51$, $\log_{27} 17$, $\log_{27} 51$, $2\log_9 153$.

49. Дано равенство $\log_7 2 = m$. Найти: $\log_{49} 28$.

50. Дано равенство $\log 3 = m$, $\log 5 = m$. Найти: $\log_{15} 30$.

51. Решить уравнение:

$$1) \log_5 x = 2 \log_5 3 + 4 \log_{25} 2;$$

$$2) \log_2 x - 2 \log_{\frac{1}{2}} x = 9;$$

$$3) \log_2 x + \log_8 x = 8;$$

$$4) \log_3 x = 9 \log_{27} 8 - 3 \log_3 4;$$

$$5) \log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3;$$

$$6) \log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}.$$

$$7) \log_3 x + \log_9 x + \log_{17} x = \frac{11}{12};$$

$$8) \log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6;$$

$$9) \log_3 x \log_2 x = 4 \log_3 2$$

$$10) \log_5 x \log_3 x = 9 \log_5 3.$$

52. Решить уравнение:

$$1) \log_{\frac{2}{6}} x - 9 \log_3 x = 4;$$

$$2) \log_{\frac{2}{3}} x + 5 \log_9 x - 1,5 = 0;$$

$$3) \log_{\frac{2}{3}} x - 15 \log_{27} x + 6 = 0;$$

$$4) 16 \log_{\frac{2}{16}} x + 2 \log_4 x - 1 = 0.$$

53. Решить уравнение:

$$1) \log_2 x - 2 \log_x 2 = -1;$$

$$2) \log_3 x + 2 \log_x 3 = 3;$$

$$3) \log_2 x + \log_x 2 = 2,5;$$

$$4) \log x - 6 \log_x 3 = 1.$$

§6. Тригонометрические преобразования и функции

54. Выразить значения функции данного аргумента через значения функции удвоенного аргумента:

$$1) \sin^2 15^\circ; \quad 2) \cos^2 \frac{\pi}{4}; \quad 3) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right); \quad 4) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + a \right).$$

55. Найти числовое значение выражения:

$$1) 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1;$$

$$2) 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8};$$

$$3) \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \sin^2 15^\circ;$$

$$4) -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cos^2 15^\circ.$$

56. Пусть $\cos \alpha = 0,6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

$$1) \sin \frac{a}{2};$$

$$2) \cos \frac{a}{2};$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

57. Пусть $\sin a = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Вычислить:

1) $\sin \frac{a}{2};$

2) $\cos \frac{a}{2};$

3) $\operatorname{tg} \frac{a}{2}.$

58. Вычислить:

1) $\sin 15^\circ;$

2) $\cos 15^\circ;$

3) $\operatorname{tg} 22^\circ 30'.$

59. Упростить.

1) $\frac{1+\cos a}{1-\cos a};$

2) $\frac{1+\cos 2a+\sin 2a}{\sin a+\cos a};$

3) $(1+\cos 2a) \operatorname{tg} a;$

4) $(1-\cos 2a) \operatorname{ctg} a;$

6) $\frac{1-\cos a}{\sin a};$

7) $\frac{\sin a}{1+\cos a};$

8) $\frac{1+\cos 4a}{\sin 4a};$

9) $\frac{1-\cos 2a+\sin 2a}{1+\cos 2a+\sin 2a};$

60. Доказать тождество.

1) $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = 1 + \sin a;$

2) $2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = 1 - \sin a;$

3) $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = 1 - \sin a;$

4) $2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = 1 + \sin a;$

5) $\frac{1-\cos 2a}{\sin 2a} \cdot \operatorname{ctg} a = 1;$

6) $\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} = \operatorname{tg} a;$

7) $\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}};$

8) $\cos a = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.$

61. Решить уравнение.

1) $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2};$

2) $1 + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2}$

3) $1 - \cos 6x = 2 \sin 3x;$

4) $1 + \cos 8x = 2 \cos 4x;$

5) $1 - \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} \right);$

6) $1 + \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{2} \right);$

7) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x = 1;$

8) $2 \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin 4x = 1$

62. Вычислить без таблиц:

1) $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ;$

2) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ;$

3) $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12};$

4) $\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12};$

$$5) \operatorname{tg} 267^\circ + \operatorname{tg} 93^\circ;$$

$$6) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{12};$$

$$7) \sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12};$$

$$8) \sin 105^\circ - \sin 165^\circ$$

63. Упростить выражение:

$$1) \sin \left(\frac{\pi}{3} + a \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} - a \right);$$

$$2) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right);$$

$$3) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + a \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - a \right);$$

$$4) \cos^2 \left(a - \frac{\pi}{4} \right) - \cos^2 \left(a + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$5) \frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a};$$

$$6) \frac{\sin 2a + \sin 4a}{\cos 2a - \sin 4a};$$

$$7) \frac{2(\cos a + \cos 3a)}{2 \sin 2a + \sin 4a};$$

$$8) \frac{1 + \sin a - \cos 2a - \sin 3a}{2 \sin^2 a + \sin a - 1}.$$

64. Доказать тождество:

$$1) \cos^4 a - \sin^4 a + \sin 2a = \sqrt{2} \cos \left(2a - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$2) \cos a + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + a \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - a \right) = 0;$$

$$3) \cos^2 a + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + a \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - a \right) = \frac{3}{2};$$

$$4) \frac{\sin 2a + \sin 4a - \sin 3a}{\cos 2a + \cos 4a - \cos 3a} = \operatorname{tg} 3a.$$

65. Преобразовать в произведение:

$$1) 1 + 2 \sin a;$$

$$2) 1 - 2 \sin a;$$

$$3) 1 + 2 \cos a;$$

$$4) \sqrt{3} - 2 \cos a;$$

$$5) 1 + \sin a;$$

$$6) 1 - \sin a;$$

$$7) 1 + \cos a + \sin a;$$

$$8) 1 - \cos a - \sin a.$$

66. Решить уравнение:

$$1) \sin 3x + \sin x = 0; \quad 2) \cos 4x + \cos x = 0; \quad 3) \sin 3x = \sin x;$$

$$4) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0; \quad 5) \sin 5x + \cos \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) = 0;$$

$$6) \cos(2x - \pi) - \sin\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0;$$

$$7) \sin 3x + \sin x = 2 \cos x;$$

$$8) \cos 5x - \cos x = 2 \sin 3x;$$

$$9) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$10) \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

67. Вычислить

$$1) \arcsin 0;$$

$$2) \arcsin 1;$$

$$3) \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$4) \arcsin \frac{1}{2};$$

$$5) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$6) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

68. Вычислить

$$1) \arcsin 1 - \arcsin(-1);$$

$$2) \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$3) \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$4) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$5) 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$6) \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 4 \arcsin 1;$$

$$7) \sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$8) \sin\left(\arcsin \frac{1}{2}\right);$$

$$9) \cos\left(\arcsin \frac{1}{2}\right);$$

$$10) \sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$11) \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$12) \sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$13) \sin(4 \arcsin 1);$$

$$14) \sin(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2});$$

$$15) \cos(5 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2});$$

$$16) \cos(6 \arcsin 1);$$

$$17) \operatorname{tg}(2 \arcsin \frac{1}{2});$$

$$18) \operatorname{tg}(4 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

69. Вычислить

$$1) \arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$2) \arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$3) \arcsin\left(\cos \frac{5\pi}{6}\right);$$

- 4) $\arcsin(\cos \frac{3\pi}{4})$; 5) $\arcsin(2 \sin \frac{\pi}{6})$; 6) $\arcsin(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4})$;
 7) $\sin(\arcsin \frac{1}{3})$; 8) $\sin(\arcsin(-\frac{1}{4}))$; 9) $\sin(\pi - \arcsin \frac{3}{4})$;
 10) $\sin(\pi + \arcsin \frac{2}{3})$; 11) $\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}})$; 12) $\cos(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{5})$.

70. Решить уравнение:

- 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

71. Решить уравнение:

- 1) $\sin x = \frac{3}{4}$; 2) $\sin x = \frac{2}{7}$; 3) $\sin x = -\frac{2}{3}$;
 4) $\sin x = -\frac{1}{4}$; 5) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 6) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
 7) $\sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{3}$; 8) $\operatorname{tg} x = \frac{1-\sqrt{10}}{2}$.

72. Решить уравнение:

- 1) $\sin 3x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$;
 3) $\sqrt{2} \sin \frac{x}{3} = -1$; 4) $2 \cos \frac{x}{2} = \sqrt{3}$
 5) $\sin(x + \frac{3\pi}{4}) = 0$; 6) $\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{2}) = 0$
 7) $\cos(2x - 1) = \frac{1}{2}$; 8) $\sin(3x + 2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

73. Решить уравнение:

- 1) $2 \sin(3x - \frac{\pi}{2}) + 1 = 0$; 2) $1 - \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) = 0$;
 3) $3 + 4 \sin(2x + 1) = 0$; 4) $5 \cos(2x + 1) - 2 = 0$
 5) $3 \cos(3 - 4x) = \sqrt{10}$; 6) $2 \operatorname{tg}(5x - 7) = -\sqrt{15}$.

74. Решить уравнение:

- 1) $(2 \sin x - 1)(3 \operatorname{tg} x + 1) = 0$;
- 2) $(4 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) = 0$;
- 3) $(2 \cos 2x - 1)(\cos 4x + 1) = 0$;
- 4) $(4 \sin 3x - 1)(2 \operatorname{ctg} x + 3) = 0$.

§7. Комплексные числа

75. Вычислить:

- 1) $(3-2i) + (5+3i)$;
- 2) $(1+2i) - (3-i)$;
- 3) $3(2-i) \cdot (3-i)$;
- 4) $(1+3i)(-7+2i)$;
- 5) $(2-i)^2$;
- 6) $(1+2i)^3$.

76. Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbb{R}$):

- 1) $(1+i)x + (2+i)y = 5+3i$;
- 2) $2x + (1+i)(x+y) = 7+i$;
- 3) $(3-y+x)(1+i) + (x-y)(2+i) = 6-3i$.

77. Вычислить:

- 1) i^{13} ;
- 2) i^{65} ;
- 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$;
- 4) $\frac{5}{1+2i}$;
- 5) $\frac{2i-3}{1+i}$;
- 6) $\frac{2+3i}{i}$;
- 7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i) + 1$;
- 8) $\frac{2+i}{2-i}(3+4i) + \frac{4-i}{3+2i}$;
- 9) $(2-i)^2$

78. Найти z^{-1} , если:

- 1) $z = 7-12i$;
- 2) $z = 3+4i$;
- 3) $z = -3+7i$;
- 4) $z = i$.

79. Вычислить:

- 1) $(1+i\sqrt{3})^3(1-i)^7$;
- 2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$;
- 3) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

80. Построить точки, соответствующие комплексным числам:
 $-1; i; -\sqrt{2}; -3i; -4 - 2i; 3 + i; -6 + 2i; 2 + 2i; -2 + 2i; -2 - 2i$.

81. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1 = -2 + i, z_2 = 3 - i$; 2) $z_1 = -3, z_2 = 4i$.

82. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел $z = x + yi$, для которых:

1) $x = 2$; 2) $1 \leq x \leq 3$; 3) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; 4) $\operatorname{Im} z = 2\operatorname{Re} z$.

83. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

1) $z = 1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{2}i$; 4) $z = 2$; 5) $z = -i$.

84. Указать на комплексной плоскости множества точек, соответствующие комплексным числам z , удовлетворяющие условиям:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \leq 5$; 3) $1 \leq |z| \leq 2$; 4) $\arg z = 0$;
5) $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$; 6) $|z - 1| = \frac{1}{3}$ 7) $|z - 3 + 2i| \leq 2$.

85. Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

1) $1, -1, i, -i$;

2) $z = 3 - 3i$;

3) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$.

86. Даны числа

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}, \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, \quad z_3 = \cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}.$$

Вычислить: 1) $z_1 z_2 z_3$; 2) $\frac{z_1}{z_2 z_3}$; 3) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$; 4) $\frac{z_1 z_3}{z_2}$.

87. Вычислить $|z|$ и $\arg z$, если $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

88. Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

89. Представить в показательной форме комплексные числа:

1) $-1-i$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

90. Найти тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

1) $z = 2e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $z = 4e^{\frac{\pi i}{2}}$; 3) $z = 3e^{\pi i}$; 4) $z = e^i$.

91. Найти $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, результат записать в алгебраической форме.

1) $z_1 = 1,5e^{0,7i}$; $z_2 = 0,7e^{1,7i}$,

2) $z_1 = e^{-0,7i+3i}$; $z_2 = e^{1,5+2i}$.

92. Вычислить z^6 и $\sqrt[4]{z}$, результаты представить в алгебраической форме и изобразить их на плоскости.

1) $z = 4,2e^{2,3i}$; 2) $z = 0,4e^{\pi i}$; 3) $z = 3,5e^{5i}$; 4) $z = -16$.

93. Решить уравнения на множестве комплексных чисел и разложить многочлен на множители:

1) $x^2 + x + 1 = 0$.

2) $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$.

3) $x^2 + 3x + 4 = 0$.

4) $x^3 - 27 = 0$.

94. Решите уравнение:

1) $z^2 = -81$ 2) $z^2 = -3$ 3) $z^2 + 0,01 = 0$
4) $9z^2 + 125 = 0$ 5) $z^2 = -\sqrt{2}$ 6) $z^2 - \sqrt[3]{3} = 0$

95. Вычислить:

1) $\sqrt{36}$ 2) $\sqrt{49}$ 3) $\sqrt{-36}$ 4) $\sqrt{-49}$ 5) $\sqrt{-8}$ 6) $\sqrt{-27}$

96. Решите уравнение:

1) $z^2 - 2z + 2 = 0$ 2) $z^2 - 4z + 5 = 0$ 3) $z^2 + 6z + 13 = 0$
4) $z^2 + 4z + 13 = 0$ 5) $z^2 + 2z + 17 = 0$ 6) $z^2 - 8z + 41 = 0$

97. Составить приведенное квадратное уравнение, имеющее корни:

1) $z_1 = 2 + 2i, z_2 = 2 - 2i$ 3) $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 2 - 3i$
2) $z_1 = -4 + i, z_2 = -4 - i$ 4) $z_1 = -7 - 4i, z_2 = -7 + 4i$

98. Решите уравнение:

1) $z^2 = -3 + 4i$ 2) $z^2 = 8 + 6i$ 3) $z^2 = 5 - 12i$
4) $z^2 = -7 + 24i$ 5) $z^2 = -15 + 8i$ 6) $z^2 = 24 - 10i$

99. С помощью тригонометрической формы комплексного числа решить уравнение:

1) $z^2 = -i$ 4) $z^2 = -i$ 7) $z^2 = 9i$
2) $z^2 = -16i$ 5) $z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$ 8) $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$
3) $z^2 = -1 + i$ 6) $z^2 = 1 + i$

§8. Производная функции и интеграл

100. Вычислите производную $f'(x)$ при данном значении аргумента x_0 :

- 1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - x - 1$, $x_0 = -1$;
- 2) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4x - 1$, $x_0 = -1$;
- 3) $f(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$, $x_0 = 2$.
- 4) $f(x) = (2x^3 - 1)(x^2 + 1)$, $x_0 = 1$;
- 5) $f(x) = (3 - x^2)(4 + x^2)$, $x_0 = -2$;
- 6) $f(x) = (x^3 + x^2)(x^2 - 1)$, $x_0 = -1$.
- 7) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$, $x_0 = -1$;
- 8) $f(x) = (x^3 + 4x^2 + 3)^7$, $x_0 = 1$;
- 9) $f(x) = (3x - 1)^4$, $x_0 = 1$.
- 10) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$, $x_0 = 2$;
- 11) $f(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^2}$, $x_0 = 2$;
- 12) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$, $x_0 = 1$.

101. Найдите производную тригонометрических функций:

- 1) $y = \sin 3x$;
- 2) $y = \cos 2x$;
- 3) $y = \operatorname{tg} x - x$;
- 4) $y = \operatorname{ctg} x + x$;
- 5) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;
- 6) $y = \sin t \cos t$;
- 7) $y = \sin x(1 + \cos x)$
- 8) $y = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$.

102. Найдите производную сложных функций:

- 1) $y = \sin^2 2x$;
- 2) $y = \cos^2(3x + 6)$;
- 3) $y = \operatorname{tg}^3 x$;
- 4) $y = \operatorname{ctg}^2(-4x)$;
- 5) $y = 4\cos^2 3x$;
- 6) $S = \sqrt{\sin 2\varphi}$.

103. Вычислите производную тригонометрической функции при данном значении аргумента x_0 :

- 1) $f(x) = \sin^2 2x$, $x_0 = \pi/16$;
- 2) $f(x) = \cos^2 2x$, $x_0 = \pi/16$;

$$3) f(x) = \operatorname{tg}^2 3x, \quad x_0 = \pi/12;$$

$$4) f(x) = \operatorname{tg}^2 x \sin x, \quad x_0 = \pi/4;$$

104. Вычислите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S = 4 \sin 3t$, в момент времени $t_0 = \frac{\pi}{9}$. Здесь S – путь, t – время (с).

105. Вычислите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S = \operatorname{tg} 2t$, в момент времени $t_0 = \frac{\pi}{6}$. Здесь S – путь, t – время (с).

106. Вычислите $f'(x)$ при данном значении аргумента x_0 :

$$1) f(x) = \arcsin x + 2 \arccos x, \quad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) f(x) = \arcsin 2x, \quad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$3) f(x) = \arccos \sqrt{3x}, \quad x_0 = \frac{1}{9};$$

$$4) f(x) = \operatorname{arccctg} 3x, \quad x_0 = \frac{1}{3};$$

$$5) f(x) = \arcsin \frac{1}{x}; \quad x_0 = \sqrt{2};$$

107. Вычислите производные логарифмических и показательных функций:

$$1) y = x \ln x; \quad 2) y = (\ln x - 1);$$

$$3) f(x) = \frac{\ln x}{x}; \quad 4) f(x) = \lg 2x;$$

$$5) f(t) = 2 \lg(t + 1), \quad t = 1; \quad 6) y = \ln \sin x;$$

$$7) f(x) = -\ln \cos x; \quad x = \pi/4; \quad 8) f(x) = \ln \operatorname{tg} 2x;$$

$$9) f(x) = 4^{3x-2} \quad 10) f(x) = e^{8x} - 5x$$

$$11) f(x) = 5^{\sin 3x} \quad 12) f(x) = 3x^5 e^{8-2x}$$

108. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

$$1) y = x^2 - 6x + 5; \quad 5) y = -\frac{1}{4}x^4 - x - 1;$$

$$2) y = -x^2 + 4x + 2; \quad 6) y = \frac{1}{2x};$$

$$3)y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2; \quad 7)y = \ln x^2;$$

$$4)y = x^4 - 4x + 4; \quad 8)y = e^{-x}.$$

109. Исследуйте функцию на экстремум:

$$1)y = x^2 - 8x + 12;$$

$$2)y = -x^2 + 2x + 3;$$

$$3)y = 2x^4 - x;$$

$$4)y = \frac{1}{3}x^3 - 4x;$$

$$5)y = 2x^3 - 9x^2 + 12x = 8;$$

$$6)f(x) = e^x + e^{-x};$$

$$7)f(x) = x - 2\ln x.$$

110. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции в заданном промежутке:

$$1)y = x^2 - 6x + 3, \quad x \in [0; 5];$$

$$2)y = x^2 - 8x + 4, \quad x \in [-2; 2];$$

$$3)y = x - \frac{1}{4}x^2, \quad x \in [-2; 4];$$

$$4)y = x^2 - 6x + 13, \quad x \in [0; 6];$$

$$5)y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3, \quad x \in [1; 3];$$

$$6)y = -x^3 + 9x^2 - 12x + 10, \quad x \in [0; 3].$$

111. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади, который можно согнуть из куска проволоки длиной 50 см?

112. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса R , найдите тот, который имеет наибольшую площадь.

113. В равносторонний треугольник с периметром 3 m вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите длины его сторон.

114. В треугольнике с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площадью (основание прямоугольника лежит на основании треугольника). Найдите длины сторон прямоугольника.

115. Число 8 разбейте на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

116. Произведение двух положительных чисел равно a . Чему равно эти два числа, если их сумма будет наименьшей?

117. Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $S = -t^3 + 3t^2 + 9t + 3$. Найдите максимальную скорость движения тела. Здесь S - путь (м), t - время (с).

118. Найдите промежутки выпуклости кривой:

1) $y = 2x^3$;

2) $y = x^2$;

3) $y = -x^2 - 1$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$.

119. Найдите точки перегиба кривой:

1) $f(x) = x^3 - x$;

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$;

3) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$;

4) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$.

Вычислите интеграл [120-125].

120. 1) $\int 3x^2 dx$;

2) $\int x^4 dx$;

3) $\int x^{(m-1)} dx$;

4) $\int 4t^3 dt$;

5) $\int \frac{dx}{x^2}$;

6) $\int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}}$.

121. 1) $\int (2x^2 - 1)^2 dx$; 2) $\int x^3 (1 - 6x^2) dx$;
 3) $\int (3x^{-4} + 8x^5) dx$; 4) $\int (x^{-4} - x^{-3} - 3x^{-2} + 1) dx$;
 5) $\int (5du^{3/2} - 7u^{3/4}) du$; 6) $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

122. 1) $\int 5^x dx$; 2) $\int 4^{2x} dx$; 3) $\int (e^x + 2x) dx$;
 4) $\int (3^x - e^x - 1) dx$; 5) $\int \frac{2dx}{x+3}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

123. 1) $\int (\sin x - 5) dx$; 2) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$; 3) $\int \sin 6x dx$;
 4) $\int (4 - 3 \cos x) dx$; 5) $\int \cos 4x dx$; 6) $\int \frac{dx}{25+x^2}$.

124. 1) $\int \frac{\cos x dx}{3 \sin x - 1}$; 2) $\int \frac{\sin x dx}{2 - \cos x}$; 3) $\int \frac{\cos x dx}{3 + 2 \sin x}$;
 4) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; 5) $\int \frac{dx}{\sin^2(3+2)}$; 6) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

125. 1) $\int_{-2}^0 (x^2 - 3x) dx$; 2) $\int_{-1}^1 (6x^3 - 5x) dx$; 3) $\int_0^4 (x - 3\sqrt{x}) dx$;
 4) $\int_0^2 e^{3x} dx$; 5) $\int_1^2 \frac{3}{2x-1} dx$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx$;
 7) $\int_1^3 2e^{2x} dx$; 8) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$; 9) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) dx$.

126. Вычислить площади фигур, ограниченные заданными линиями:

1) $a = 2, b = 4, f(x) = x^3$; 2) $a = 3, b = 4, f(x) = x^3$;
 3) $y = 3x - 1, x = 2, y = 0$; 4) $y = 4 - x^2, y = 0$;
 5) $x = 1, x = 8, f(x) = \sqrt{x}$; 6) $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, f(x) = \sin x$;
 7) $y = x^3 + 1, y = 1, x = 2$; 8) $y = e^x, x = 0, y = 0, x = 2$;
 9) $y = \frac{1}{x}, x = 1, y = 0$; 10) $y = \sqrt[3]{x}, x = 8, \text{ ось } Ox$.

§9. Система координат на плоскости и в пространстве

127. Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат точки $A(6; 7)$, $B(3; 3)$, $C(1; -5)$.

128. Найдите точку, равноудаленную от точек $A(7; -1)$, $B(-2; 2)$ и $C(-1; -5)$.

129. Точка C делит отрезок AB в отношении $3 : 5$ (от A к B). Концами отрезка служат точки $A(2; 3)$, $B(10; 11)$. Найдите точку C .

130. Точка $C(3; 5)$ делит отрезок AB в отношении $AC : CB = 3 : 4$. Найдите начало отрезка - точку A , если его концом служит точка $B(-1; 1)$.

131. Отрезок задан точками $A(-5; -2)$ и $B(-1; 0)$. До какой точки C необходимо его продолжить, чтобы было справедливо соотношение $AB : BC = 2 : 5$?

132. Вычислите длину отрезка прямой $4x + 3y - 36 = 0$, заключенного между осями координат.

133. Преобразуйте уравнение прямой $2x + 3y - 6 = 0$ в уравнение в отрезках на осях.

134. Найдите длину отрезка прямой $\frac{x}{9} + \frac{y}{-12} = 1$, заключенного между осями координат.

135. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $A(-2; 3)$.

136. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью абсцисс угол, равный $\arctg 3$.

137. Диагональ прямоугольника, две стороны которого лежат на положительных направлениях осей координат, равна 20. Угловой коэффициент диагонали составляет $\frac{3}{4}$. Найдите вершины прямоугольника.

138. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-5; -2)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = -12$.

139. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(2; 3)$ и образующей с осью абсцисс угол 45° .
140. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; -1), B(-2; -2)$.
141. Составьте уравнения сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(-3; -2), B(1; 5), C(8; -4)$.
142. Треугольник задан вершинами $A(-3; 4), B(-4; -3), C(8; 1)$. Составьте уравнение медианы AD .
143. Найдите угол наклона к оси абсцисс прямой, проходящей через точки $A(-3; -3)$ и $B(2; 1)$.
144. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-4; -1)$ и пересекающей ось ординат в точке $(0; 3)$.
145. Найдите вершины треугольника, стороны которого заданы уравнениями $4x + 3y + 20 = 0; 6x - 7y - 16 = 0; x - 5y + 5 = 0$.
146. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-2; 5)$ и образующей с прямой $3x - y + 4 = 0$ угол, равный $\arctg \frac{1}{7}$.
147. Две прямые, проходящие через начало координат, образуют между собой угол, равный $\arctg \frac{1}{3}$. Отношение угловых коэффициентов этих прямых составляет $2 : 7$. Составьте уравнения этих прямых.
148. Треугольник задан вершинами $A(-6; -2), B(4; 8), C(2; -10)$. Составьте уравнение биссектрисы угла BAC .
150. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(-3; 2)$ параллельно прямой $5x - 3y + 21 = 0$.
151. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + y - 4 = 0$ и $x - y = 0$ параллельно прямой.
152. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; -3)$ и перпендикулярной прямой $5x - 2y + 10 = 0$.

§10. Функции и графики

153. Найти область определения функций:

$$1) y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}; \quad 2) y = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

$$3) y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}; \quad 4) y = \sqrt{1 - x};$$

$$5) y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}; \quad 6) y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-4}.$$

154. Найти область определения и изобразить графики функций, заданные несколькими условиями.

$$1) y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}; \quad 2) y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 3 \end{cases}; \quad 4) y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases};$$

$$5) y = \begin{cases} -x, & x < -1, \\ x^2, & -1 < x \leq 1, \\ 2, & 1 \leq x < 2, \\ x, & 2 \leq x \end{cases}$$

$$6) y = \begin{cases} x^2 - 5, & x < -2 \text{ или } x > 2, \\ -1, & -2 < x \leq -1 \text{ или } 1 \leq x < 2 \\ 1 - 2x^2, & -1 < x < 1. \end{cases}$$

155. Построить графики функций (при построении использовать основные способы преобразования графиков функций).

$$1) y = x^2 + 2 \quad 2) y = \sqrt{x} - 2$$

$$3) y = \sqrt{x+2} \quad 4) y = x^2 - 4x + 4.$$

$$5) y = -x^2 + 2x - 1 \quad 6) y = -\sqrt{x+1}$$

$$7) y = \sqrt{-x} \quad 8) y = \frac{1}{-x}$$

$$9) y = \frac{x}{x+1} \quad 10) y = \frac{x}{x-1}$$

11) $y = 1 - \sqrt{x+1}$

12) $y = 2 - \sqrt{1-x}$

13) $y = -\sqrt[3]{x+3} + 1$

14) $y = 2 - \sqrt[3]{1-x}$

15) $y = 2x^2$

16) $y = -x^2/2$

17) $y = |x^2 - 4x + 3|$

18) $y = |x^2 - x - 2|$

19) $y = \left| \frac{x+1}{x} \right|$

20) $y = \left| \frac{2x-1}{x-1} \right|$

156. Исследовать функцию на четность или нечетность аналитическим способом.

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^7$

2) $g(x) = -x^2 + x^6$

3) $f(x) = 5x^2 + 3x^4$

4) $y(x) = 7x - \operatorname{Ctg} x$

5) $t(x) = x^5 + \sin x$

6) $y(x) = x^4 + \cos x$

7) $f(x) = \frac{2\cos x}{3x^2 + 5}$

157. Функция задана графиком (рисунок 1-6). Исследовать функцию по чертежу, по плану:

а) найдите область определения функции;

б) найдите множество значений функции;

в) найдите нули функции;

г) найдите промежутки монотонности функции;

д) найдите точки максимума и минимума функции;

ж) найдите наибольшее и наименьшее значение функции;

з) найдите $f(1)$, $f(-2)$, $f(3)$;

и) найдите значение аргумента, при котором $y=1$;

к) при каких значениях a уравнение $f(x)=a$ ровно два корня;

л) найдите при каких значениях t уравнение $f(x)<t$ выполняется при всех x из отрезка $[0;1]$.

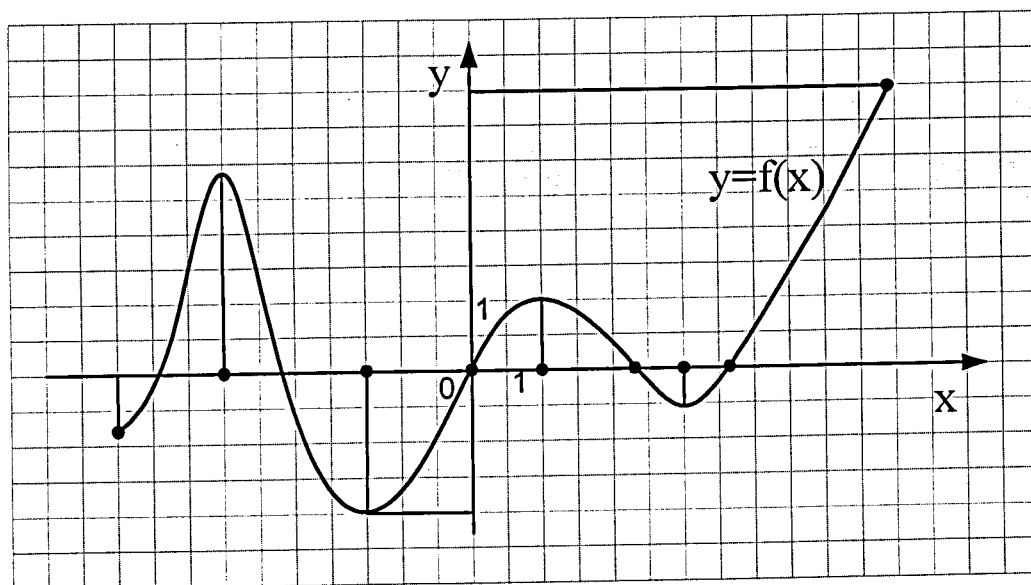


Рисунок 1

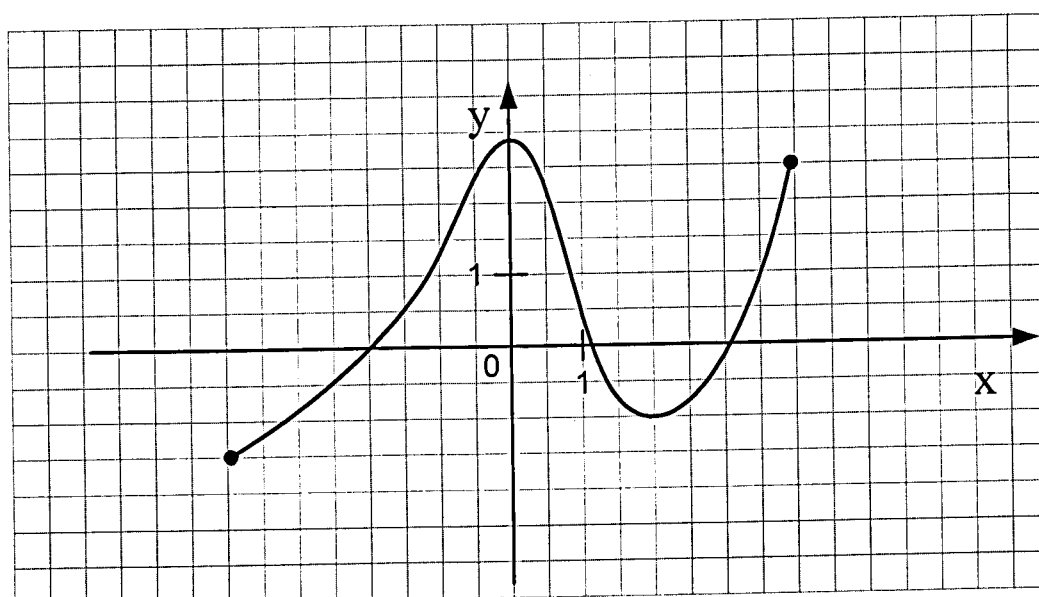


Рисунок 2

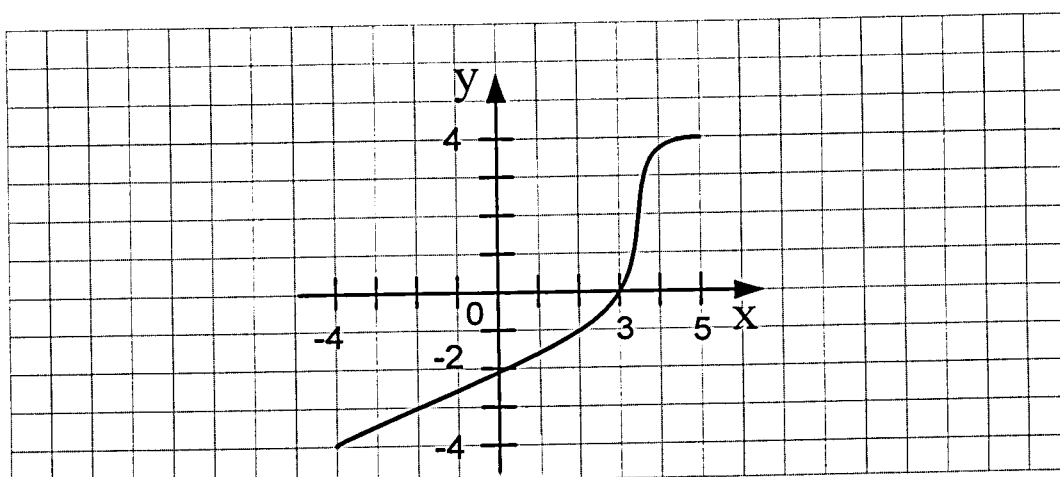


Рисунок 3

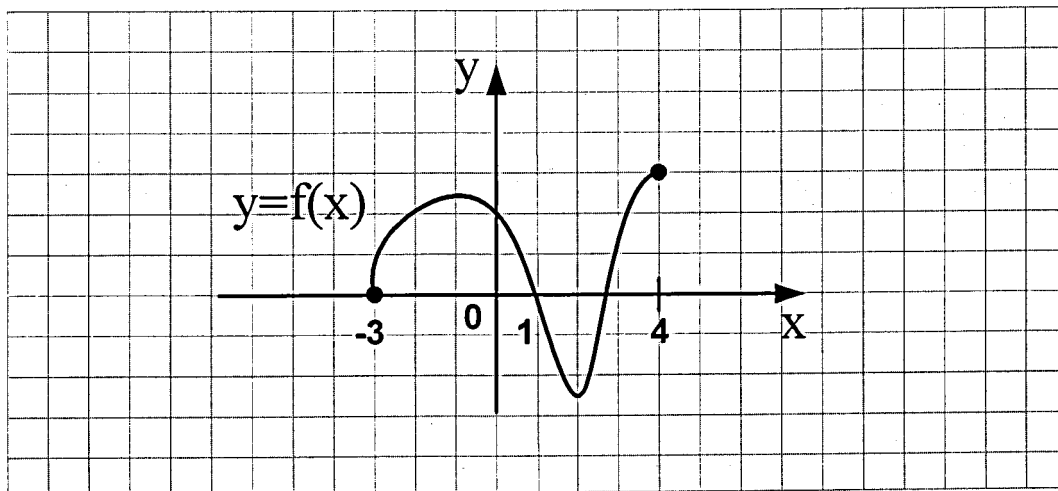


Рисунок 4

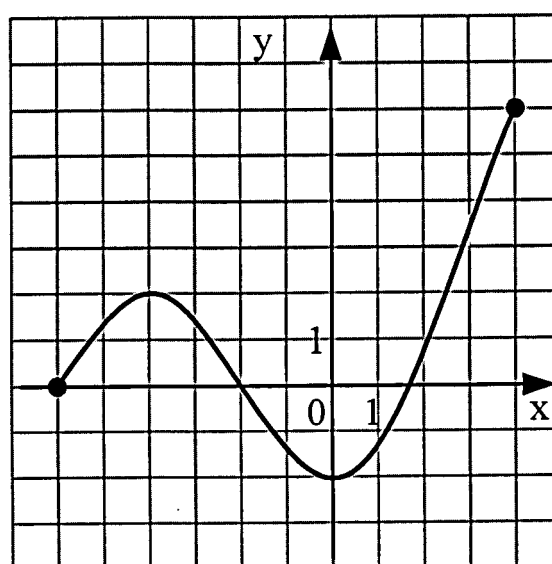


Рисунок 5

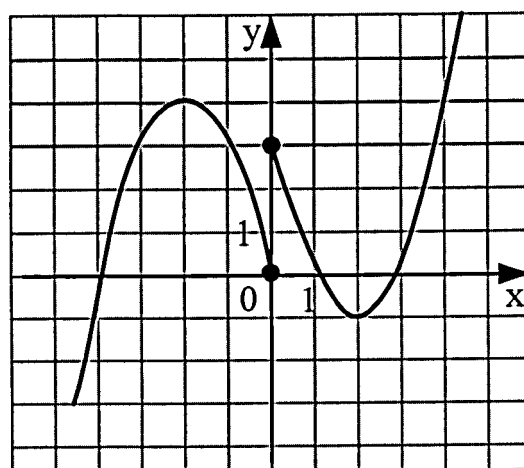


Рисунок 6

Список использованных источников

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. Алгебра и начала анализа: учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др.- 16.изд.- М.: Просвещение, 2015 г.- 384 с.
2. Богомолов Н. В. Сборник задач по математике : учеб. пособие для ссузов /Н. В. Богомолов. — 5-е изд., стереотип. — М. : Дрофа,2019. — 204, [4] с. : ил.
3. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. Учреждений сред. проф. Образования / М.И. Башмаков.- 5-е изд. стер.- М.: Издательский центр «Академия», 2014 г. -416 с.