МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ
И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»
(СибГУТИ)
ХАБАРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОКОММУНИКАЦИЙ (ФИЛИАЛ)
(ХИИК СибГУТИ)
СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ по дисциплине

ЕН.01 Элементы высшей математики

ЧАСТЬ 2

для студентов специальности

09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Хабаровск
2023

ББК 22
Р 189

Райлян М.Н. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 «Элементы высшей математики» ЧАСТЬ 2 для студентов специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» среднего профессионального образования. Исправленное, дополненное. – г. Хабаровск, ХИИК СибГУТИ; 2023 год

Методические указания содержат задания для выполнения практических работ по дисциплине «Элементы высшей математики», порядок и образец выполнения работ, а так же основные требования к знаниям и умениям студентов по темам в соответствии с требованиями ФГОС СПО.

Методические указания по дисциплине «Элементы высшей математики» могут быть использованы как для практических занятий под руководством преподавателя, так и для самостоятельной работы.

Для студентов специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» СПО.

Рецензент: Калиниченко Ю.А. – преподаватель высшей категории ХИИК СибГУТИ

Рассмотрено на заседании ПЦК ИСП протокол № 3 от 04.10.2023 г.
Председатель ПЦК ИСП ____________________ О.В. Диденко

г. Хабаровск, 2023 год

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа №10

Тема: Решение дифференциальных уравнений.

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по решению дифференциальных уравнений с разделяющими переменными и однородных дифференциальных уравнений.

Знать:

- определение обыкновенного и однородного дифференциального уравнения;
- порядок дифференциального уравнения;
- решение дифференциального уравнения;
- дифференциальное уравнение с разделяющими переменными;
- однородные дифференциальные уравнения;
- общее и частное решение дифференциального уравнения;
-решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Уметь:

- находить общее решение дифференциальных уравнений с разделяющими переменными;
- решать задачу Коши для дифференциальных уравнений;
- решать однородные дифференциальные уравнения;
- находить общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2 порядка с постоянными коэфициентами.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе: Повторить

3.1. Общее и частное решение дифференциальных уравнений с разделяющими переменными.

3.2. Общее решение однородных дифференциальных уравнений

3.3 Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 2 порядка.

4. Задание:

Выполните задание в соответствии с вариантом (таблица 10.1).

4.1. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения, решите задачу Коши для заданных начальных условий.

4.2. Найти общее решение дифференциального уравнения.

4.3. Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 2 порядка.

Таблица 10.1 Варианты заданий практической работы

Вариант 1 1. $(x+1)^3\ dy-(y-2)^2\ dx=0,$ $y(0)=0$ 2. $(x^2-y^2)y'-2xy=0$ 3. $y''-2y'-3y=0;$ $y''-2y'+50y=0$	**Вариант 2** 1. $(1+y^2)dx=xydy,\ y(2)=1$ 2. $y'\cos x-(y+1)\sin x=0$ 3. $y''-3y'+2y=0;$ $y''-6y'+9y=0$
Вариант 3 1. $ydx+ctgx\ dy=0, y\left(\frac{\Pi}{3}\right)$=1 2. $(1+x^2)y'-2xy-(1+x^2)^2=0$ 3. $y''-4y'+4y=0;$ $y''+2y'+5y=0$	**Вариант 4** 1. $(xy^2+x)dx-(x^2y+y)dy=0,$ $y(\sqrt{3})=0$ 2. $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$ 3. $y''-7y'+6y=0;$ $y''-6y'+25y=0$
Вариант 5 1. $y'\ \cos^2 x\bullet\ln y=y,\ y(\Pi)=1$ 2. $xy'-y\ln\left(\frac{y}{x}\right)=0$ 3. $3y''-2y'-8y=0;$ $y''+4y'+29y=0$	**Вариант 6** 1. $(1+x^2)dy-2xydx=0,\ y(0)=1$ 2. $x^2y'-2xy-3x^2=0$ 3. $4y''-4y'+y=0;$ $y''-2y'+5y=0$

Вариант 7	Вариант 8
1. $(1+x^2)y^2dx-(y^2-1)x^3dy=0$, $y(1)=1$ 2. $xy'+xe^{\frac{y}{x}}=y$ 3. $y''+3y'+y=0$ $y''-2y'+10y=0$	1. $y'tgx-y=1,\ y\left(\frac{\Pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ 2. $x^2y'+y^2=2xy$ 3. $9y''-6y'+y=0;$ $y''+y'-2y=0$
Вариант 9	**Вариант 10**
1. $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$, $y(0)=1$ 2. $xy'+y=3$ 3. $4y''+16y'+13y=0;$ $y''+4y'+y=0$	1. $(1+x^2)dy-2x(y-3)dx=0$, $y(0)=-1$ 2. $xy'+y=x$ 3. $4y''-8y'+5y=0;$ $y''-2y'-y=0$

5. Порядок выполнения:

5.1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения, решить задачу Коши для заданных начальных условий: $y'=2xy$, $y(2)=5$.

Решение:

Дано дифференциальное уравнение $y'=2xy$,

$y'=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=2xy$, умножим обе части уравнения на dx и разделим на y, получим $\frac{dy}{y}=2xdx$. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$; $ln|y|=\frac{2x^2}{2}+c$; $ln|y|=2x^2+c$, получили общее решение дифференциального уравнения или $y=e^{2x^2+c}$. Для того, чтобы из общего решения выделить частное, необходимо задать начальные условия, в нашем случае $y(2)=5\quad\Rightarrow x=2,\quad y=5$, тогда $ln|5|\quad=2\cdot2^2+c\quad\Rightarrow\quad c=ln|5|-8$, значит частное решение имеет вид:

$\ln|y|=2x^2+ln|5|-8$ или $y=e^{2x^2+ln|5|-8}$.

5.2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$(xy^2 + x)\,dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$

Решение:

$(xy^2 + x)\,dx + (x^2 - x^2y)\,dy = 0$

$x\,(y^2 + 1)\,dx + x^2\,(1 - y)\,dy = 0$, разделим обе части уравнения на $(y^2 + 1) \bullet x^2$;

$\frac{xdx}{x^2} + \frac{(1-y)dy}{(y^2+1)} = 0$, проинтегрируем обе части, получим

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1-y)dy}{y^2+1} = c$, разделим почленно числитель на знаменатель во 2-м интеграле

$ln|x| + \int \frac{dy}{y^2+1} - \int \frac{ydy}{y^2+1} = c$,

$ln|x| + arctgy - \frac{1}{2} ln\ (y^2 + 1) = c$ -общий интеграл дифференциального уравнения.

5.3 Решить дифференциальное уравнение 2 порядка

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

Вычисляя дискриминант, а Д=0, получаем два кратных действительных корня $k_{1,2} = 3$, т.е. если $D = 0$, то уравнение имеет два корня $k_1 = k_2$, а общее решение записывается в виде $y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$

Подставим и запишем общее решение ДУ

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$$

6. Контрольные вопросы.

6.1. Какое уравнение называется дифференциальным?

6.2. Чем отличается обыкновенное дифференциальное уравнение от однородного дифференциального уравнения?

6.3. Что такое общее и частное решение дифференциального уравнения?

7. Приложение. Теоретический материал.

Определение: Дифференциальным уравнением *(сокращенно ДУ или диф.ур)* называют уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.

$$F(x, y, y', y'', y'''\dots) = 0$$

Определение: ДУ с разделяющимися переменными называется уравнение вида: $\frac{dy}{dx} = f(x)\phi(y)$

ДУ с разделенными переменными имеет вид: $f(x)dx = \varphi(y)dy$.

Алгоритм решения ДУ с разделяющимися переменными.

1. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.

Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

Определение: Уравнение вида $y' + py = g$ (1), где p(x) и f(x) – непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Определение: если $g = 0$, то уравнение (1) называется линейным однородным уравнением. Если $g \neq 0$, то уравнение (1) называется линейным неоднородным уравнением.

Замечание: линейные однородные ДУ решаются как ДУ с разделяющимися переменными. Линейные неоднородные ДУ решаются методом Бернулли.

Метод Бернулли

1. Приводят уравнение к виду $y' + py = g$.
2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y = u'v + v'u$и подставляют эти выражения в уравнение.
3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций *u или v за скобки.*

Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.

4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.

5. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций uи v в равенство $y = uv$.

Если требуется найти частное решение, то определяют С из начальных условий и подставляют в общее решение.

Определение: Дифференциальное уравнение вида: *y''+py'+qy = f(x),* где коэффициенты p , q – постоянные, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

В теории и практике различают два типа таких уравнений – однородное равнение **и** неоднородное уравнение.

Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Записывают дифференциальное уравнение в виде

$$y'' + py' + qy = 0.$$

2. Составляют его характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0$$

3. Вычисляют его дискриминант

$$D = p^2 - 4q.$$

а) Если $D > 0$, то уравнение имеет два разных корня k_1 и k_2, а общее решение записывается в виде

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_2x}$$

б) Если $D = 0$, то уравнение имеет два корня $k_1 = k_2$, а общее решение записывается в виде

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$$

в) Если $D < 0$, то уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2} = a \pm bi$, а общее решение записывается в виде

$y = e^{ax}(C_1cosbx + C_2sinbx)$.

Практическая работа №11

Тема: Нахождение значения матричного многочлена.

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по выполнению действий над матрицами (умножение матриц, сложение матриц, умножение матрицы на число), нахождению обратной матрицы и вычислению определителей.

Знать:

- определение матрицы;
- действия над матрицами;
- свойства действий над матрицами;
- понятие обратной матрицы.

Уметь:

- выполнять операции над матрицами;
- находить обратную матрицу;
- вычислять определитель.

***2.* Литература** Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

3.1. Повторить операции над матрицами;

3.2. Повторить правило нахождения обратной матрицы;

3.3 Повторить способы вычисления определителя.

4. Задание:

4.1. Даны матрицы A,B,C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите значение матричного многочлена в соответствии с вариантом (таблица 11.1), если (E- единичная матрица 3 порядка).

Таблица 11.1 Варианты заданий практической работы

Вариант -1	$A^{-1}+B^2-4E$	Вариант-6	$(B-C)^2+2E+A^{-1}$
Вариант- 2	$BC-2A^{-1}+3E$	Вариант -7	$B\times A-C^{-1}+3E$
Вариант -3	$AC+B^{-1}-5E$	Вариант -8	$2AB-2C^{-1}+E$
Вариант -4	$A^2-2B^{-1}+E$	Вариант -9	$(E+2B^{-1})-C\times A$
Вариант -5	$C^2-7B^{-1}-E$	Вариант -10	$(B+A^{-1})\times C+2E$

5. Порядок выполнения:

Даны матрицы A и B. Найти значение матричного многочлена $A^{-1}+AB-4E$,

если $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

Решение: 1) Найдем обратную матрицу A^{-1}, по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}(1)$$

где A_{ij} –алгебраические дополнения элементов матрицы A^T.

Найдем ΔA, определитель матрицы A,

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2-2+0-(12+0+0)=-4-12=-16$$

Найдем A^T, $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$

Найдем алгебраические дополнения матрицы A^T и подставим в формулу (1).

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2; A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 \\ -2 & -7 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/16 & 7/16 \\ 1/8 & 7/16 & -1/16 \\ 1/4 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

Значит $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/16 & 7/16 \\ 1/8 & 7/16 & -1/16 \\ 1/4 & -1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$

2) Найдем произведение матриц $B \times A$.

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{перемножим строки} \\ \text{первой матрицы} \\ \text{на столбцы второй} \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times1+3\times0+(-1)\times2 & 1\times1+3\times2+(-1)\times0 & 1\times3+3\times(-1)+(-1)\times(-1) \\ 0\times1+0\times0+5\times2 & 0\times1+0\times2+5\times0 & 0\times3+0\times(-1)+5\times(-1) \\ 1\times1+2\times0+2\times2 & 1\times1+2\times2+2\times0 & 1\times3+2\times0+2\times(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0-2 & 1+6+0 & 3-3+2 \\ 0+0+10 & 0+0+0 & 0+0-5 \\ 1+0+4 & 1+4+0 & 3+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 10 & 0 & -5) \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 10 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Найдем произведение единичной матрицы E на число (-4).

$$-4E = -4 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

4) Найдем значение матричного многочлена $A^{-1}+AB-4E$, подставляя полученные в пунктах 1)-3) значения.

$$A^{-1} + B \times A - 4E = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{8} & {}^{-1}/_{16} & {}^{7}/_{16} \\ {}^{1}/_{8} & {}^{7}/_{16} & {}^{-1}/_{16} \\ {}^{1}/_{4} & {}^{-1}/_{8} & {}^{-1}/_{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 10 & 0 & -5) \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} {}^{1}/_{8} - 1 - 4 & {}^{-1}/_{16} + 7 + 0 & {}^{7}/_{16} + 2 + 0 & \\ {}^{1}/_{8} + 10 + 0 & {}^{7}/_{16} + 0 - 4 & {}^{-1}/_{16} - 5 & -4 + 0 \\ {}^{1}/_{4} + 5 + 0 & {}^{-1}/_{8} + 5 + 0 & {}^{-1}/_{8} + 1 & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} {}^{-39}/_{8} & {}^{111}/_{16} & {}^{39}/_{16} \\ {}^{81}/_{8} & {}^{-57}/_{16} & {}^{-81}/_{16} \\ {}^{21}/_{4} & {}^{39}/_{8} & {}^{-25}/_{8} \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} + B \times A - 4E = \begin{pmatrix} {}^{-39}/_{8} & {}^{111}/_{16} & {}^{39}/_{16} \\ {}^{81}/_{8} & {}^{-57}/_{16} & {}^{-81}/_{16} \\ {}^{21}/_{4} & {}^{39}/_{8} & {}^{-25}/_{8} \end{pmatrix}$

4. Контрольные вопросы:

4.1 Чем отличается определитель от матрицы?

4.2 Какие действия над матрицами можно выполнять?

4.3 В чем особенность умножения матриц?

4.4 Какая матрица называется единичной?

4.5 Какая матрица называется нулевой?

4.6 По какой формуле находят обратную матрицу?

Практическая работа №12

Тема: Решение систем трёх линейных уравнений методами Крамера и Гаусса.

1. **Цель:** Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по решению систем трех линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

Знать:

- определение системы трех линейных уравнений;
- метод Крамера для решения систем линейных уравнений;
- метод Гаусса для решения систем линейных уравнений;
- теорему о линейной комбинации строк и столбцов определителя;
- свойства матриц.

Уметь:

- решать системы трех линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе

2.1Повторить формулы Крамера;

2.2Повторить метод Гаусса.

4. Задание:

Решить систему трёх линейных уравнений тремя методами: Крамера, Гаусса и с помощью обратной матрицы в соответствии с вариантом (таблица 12.1).

Таблица 12.1 Варианты заданий практической работы

Вариант 1 $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ x + 2y + z = 6 \\ -x + 4y + 6z = 1 \end{cases}$	Вариант 2 $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + z = 2 \\ 4y + 2z = 1 \end{cases}$
Вариант 3 $\begin{cases} x + 5y - 2z = 5 \\ 2x - 4y + 3z = 3 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$	Вариант 4 $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - z = -2 \\ -x + y + 2z = 4 \end{cases}$

Вариант 5 $\begin{cases}7x - 2y + z = 0\\3x + 3y - z = 2\\4x + y + z = 6\end{cases}$	Вариант 6 $\begin{cases}x - y + 2z = 11\\2x + y + z = 7\\y + z = 5\end{cases}$
Вариант 7 $\begin{cases}4x - y + z = 4\\3x + 2y - z = 4\\-x + y + z = -1\end{cases}$	Вариант 8 $\begin{cases}x + 2y - z = 2\\2x - 3y + z = 0\\-x + y + z = 1\end{cases}$
Вариант 9 $\begin{cases}x + 3y + 2z = 4\\2x + y + 3z = 11\\2y + z = 3\end{cases}$	Вариант 10 $\begin{cases}7x + 3y = 0\\x + y + z = 1\\x - y + 3z = -3\end{cases}$

5. Порядок выполнения:

Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}2x + y - z = 5\\x - 2y + 3z = -3\\7x + y - z = 10\end{cases}$$

1. Решим систему уравнений методом Крамера.

Найдём определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных.

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\1 & -2 & 3\\7 & 1 & -1\end{vmatrix} = 4 + 21 - 1 - (14 - 1 + 6) = 24 - 19 = 5$$

$\Delta = 5 \neq 0 \Rightarrow$ Можно решить по формулам Крамера. Составим и вычислим дополнительные определители Δx, Δy и Δz.(При составлении определителя Δx, столбец коэффициентов при x, заменяем свободными коэффициентами. Аналогично поступаем при составлении определителей Δy и Δz).

$$\Delta x = \begin{vmatrix}5 & 1 & -1\\-3 & -2 & 3\\10 & 1 & -1\end{vmatrix} = 10 + 30 + 3 - (20 + 3 + 15) = 43 - 38 = 5$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\1 & -3 & 3\\7 & 10 & 1\end{vmatrix} = 6 + 105 - 10 - (21 - 5 - 60) = 101 - 76 = 25$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 7 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -40 - 21 + 5 - (-70 + 10 - 6) = -56 + 66 = 10$$

По формулам Крамера $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$, следовательно, получим

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{25}{5} = 5; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$$

Ответ: x = 1, y = 5, z = 2.

2. Решим систему методом Гаусса.

Решение методом Гаусса состоит из двух этапов: прямой ход и обратный ход.

Прямой ход: Запишем матрицу соответствующую данной системе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

столбец свободных коэффициентов системы

Коэффициенты
при неизвестных

Преобразуем матрицу в эквивалентную, поменяв местами 1 и 2 строки, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

Полученную матрицу приведем к треугольному виду, то есть в выделенном треугольнике получим нули, для этого ко второй строке прибавим первую строку умноженную на (-2) и к третьей строке прибавим первую строку умноженную на (-7). Коротко можно записать так:

2 стр+1стр*(-2) и 3стр+1 стр*(-7) получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \text{теперь 3строку} + \text{2строку} * (-3)\text{, получим}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \text{система уравнений приняла треугольный вид}$$

Обратный ход: Запишем полученную матрицу в систему и решим её.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 5y - 7z = 11 \\ -z = -2 \end{cases}$$

Решая третье уравнение системы получим $z = 2$, далее решим второе и первое уравнение системы, получим

$5y - 14 = 11 \qquad x - 10 + 6 = -3$

$5y = 25 \qquad x - 3 + 4$

$y = 5 \qquad x = 1$

Ответ: x = 1, y = 5, z = 2

3. Решим систему матричным методом

Представим систему в матричном виде $A \times X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Замечание: Если в уравнениях отсутствуют некоторые переменные, то на соответствующих местах в матрице необходимо поставить нули.

Решение системы находится по формуле $X = A^{-1} \times B$,

Обратная матрица A^{-1} находится по формуле:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^T$,

где A^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A и $|A|$ – определитель, порожденный данной матрицей.

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$

Решите систему используя формулы самостоятельно.

6. Контрольные вопросы:

6.1 Какая система называется системой трех линейных уравнений?

6.2 Какие способы решения систем линейных уравнений вы знаете?

6.3 При каком условии правило Крамера, для решения систем линейных уравнений, не применимо?

6.4 В чем заключается теорема о линейной комбинации строк и столбцов определителя?

6.5 В чем заключается метод Гаусса?

Практическая работа №13

Тема: Операции над векторами.

1. Цель: Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по выполнению действий над векторами заданными своими координатами и применению векторов при решении геометрических задач.

Знать:

- определение вектора;
- действия над векторами заданными своими координатами;
- формулу для нахождения скалярного произведения векторов;
- формулу для нахождения векторного произведения векторов;
- формулы площадей треугольника и параллелограмма, построенных на векторах;
- формулу длинны вектора.

Уметь:

- выполнять действия над векторами;
- вычислять скалярное и векторное произведения векторов;
- вычислять площади треугольника и параллелограмма построенных на векторах;
- вычислять длину вектора.

2. Литература: Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

3.1 Повторить линейные операции над векторами, действия над векторами заданными своими координатами, формулы для нахождения векторного и скалярного произведения;

3.2 Повторить формулы для нахождения площадей треугольника и параллелограмма, построенных на векторах.

4. Задание: выполните задание в соответствии с вариантом (таблица 13.1)

4.1. Найти скалярное $(\vec{a} \cdot \vec{в})$, векторное$(\vec{a} \times \vec{в})$ и смешанное произведение векторов.

4.2. Найти площадь треугольника (для четного варианта) и параллелограмма (для нечетного варианта) построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{c}$

4.3. Вычислить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

4.4. Найти скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{в}) \cdot 2\,\vec{c}$

4.5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти заданный вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{CD}$

таблице 13.1 Варианты заданий практической работы

Вариант	Векторы и их координаты
В-1	$\vec{a}$ (0;1;2) $\vec{в}$ (-4;4;1) $\vec{c}$ (9;-2;3)
В-2	$\vec{a}$ (2;6;-1) $\vec{в}$ (-6;-2;0) $\vec{c}$ (8;-3;4)
В-3	$\vec{a}$(1;4;5) $\vec{в}$ (-1;-5;3) $\vec{c}$(-3;1;4)
В-4	$\vec{a}$(1;4;7) $\vec{в}$(1;-6;2) $\vec{c}$(-6;2;1)
В-5	$\vec{a}$(5;7;2) $\vec{в}$(-6;4;-1) $\vec{c}$(-1;-2;2)
В-6	$\vec{a}$(8;6;1) $\vec{в}$(-3;-2;5) $\vec{c}$(-6;4;8)
В-7	$\vec{a}$(9;-1;2) $\vec{в}$(-3;-4;10) $\vec{c}$(1;2;3)
В-8	$\vec{a}$(-6;1;2) $\vec{в}$(4;8;11) $\vec{c}$(1;-5;8)
В-9	$\vec{a}$(0;7;2) $\vec{в}$(-2;4;9) $\vec{c}$(5;-3;1)
В-10	$\vec{a}$(-10;-1;2) $\vec{в}$(4;7;-6) $\vec{c}$(-4;2;5)

5. Порядок выполнения:

Даны векторы $\vec{a}\ (1; -2; 4)$ $\vec{в}\ (2; 4; 3)$ $\vec{c}\ (8; 6; -1)$

5.1. Найти скалярное $(\vec{a} \cdot \vec{в})$ и векторное $(\vec{a} \times \vec{в})$ произведение векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{в}$.

а) Найдем скалярное произведение векторов $(\vec{a} \cdot \vec{в})$ по формуле

$(\vec{a} \cdot \vec{в}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 z_2$,

получаем $(\vec{a} \cdot \vec{в})$= 1*2 + (–2)*4 + 3*4 = 2 – 8 + 12 = 6, $(\vec{a} \cdot \vec{в})$= 6

б) Найдем векторное произведение $(\vec{a} \times \vec{в})$ по формуле:

$$(\vec{a} \times \vec{в}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{в}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} == i\big((-2) \cdot 3 - 4 \cdot 4\big) - j(1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) +$$

$$+k(1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2)) = -22i + 5j + 8k$$

в) Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

Определитель посчитать любым известным вам способом.

5.2. а) Найти площадь треугольника построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{c}$

Найдем площадь треугольника построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{c}$, по свойству векторного произведения, площадь треугольника построенного на неколлинеарных векторах равна половине длины вектора перпендикулярного двум данным, графическое изображение на рисунке 13.1.

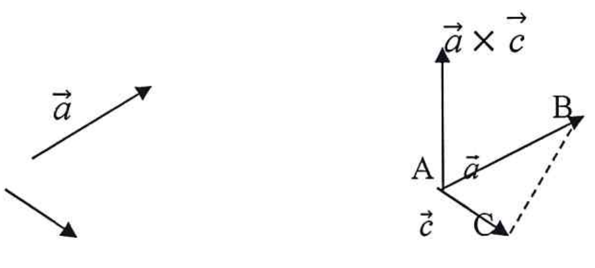

Рисунок 13.1 Графическое изображение треугольника построенного на векторах

Вычислим площадь треугольника ABC по формуле: $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{c}|$

Найдем векторное произведение

$$(\vec{a} \times \vec{в}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 8 & 6 & -1 \end{vmatrix} = i(2-24) - j(-1-32) + k(6+16) = -22\vec{i} + 33\vec{j} + 22\vec{к}$$

$$\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-22)^2 + 33^2 + 22^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2057} \approx 22{,}7(ед^2),$$

следовательно, площадь треугольника ABC построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равна S_{ABC}= 22.7 (ед.^{2}).

Ответ: S_{ABC} = 22.7 (ед.^{2}) – площадь треугольника построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$

б) Найти площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{в}$ и $\vec{c}$

Найдем площадь параллелограмма построенного на неколлинеарных векторах $\vec{в}$ и $\vec{c}$ (рисунок 2).

Площадь параллелограмма вычисляется по формуле: $S_{ABCD} = \left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$

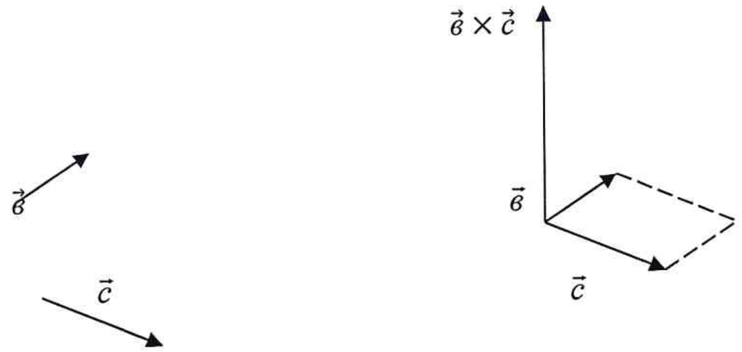

Рис.2 Графическое изображение параллелограмма построенного на векторах

$$\vec{в} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & -1 \end{vmatrix} = i(-4-18) - j(-2-24) + k(12-32)$$

$$= -22\vec{i} + 26\vec{j} - 20\vec{k}$$

$$\left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \sqrt{(-22)^2 + 26^2 + (-20)^2} = \sqrt{1560} \approx 39{,}5 \quad (ед^2)$$

Площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{в}$ и $\vec{c}$: S_{ABCD} =39,5(ед^2)

5.3. Вычислить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Вычислим угол между векторами используя любую из формул:

$$1)\ \cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$2)\ \sin(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Косинус угла равен , $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1\cdot2+(-2)\cdot4+4\cdot3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+3^2}}$

Угол между векторами соответственно вычисляем по формуле

$\vec{a}\wedge\vec{b} = arccos\left(\frac{1\cdot2+(-2)\cdot4+4\cdot3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+3^2}}\right)$

Расчеты произведите самостоятельно, примерное значение угла рассчитать используя калькулятор.

5.4. Найти скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{в})\cdot2\vec{c}$.

Найдем сумму векторов $\vec{a}+\vec{в} = (1+2; -2+4; 4+3) = (3;\ 2;\ 7)$.

Найдем $2\,\vec{c} = (8\cdot2; 6\cdot2; (-1)\cdot2)$, $2\,\vec{c} = (16; 12; -2)$.

Найдем скалярное произведение векторов $(\vec{a}+\vec{в})\cdot2\,\vec{c} = 3\cdot16+2\cdot12+7\cdot(-2) = 58$

5.5 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти заданный вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CD}$

Сделать чертеж параллелепипеда, ввести обозначения. Цветными карандашами обозначить заданные векторы. С помощью линейных операций над векторами найдите заданный вектор.

6. Контрольные вопросы:

6.1 Как найти длину вектора?

6.2 Как найти сумму и разность векторов?

6.3 Как найти скалярное произведение?

6.5 Как найти векторное произведение?

6.6 Что получится в результате векторного произведения, а что в результате скалярного произведения?

7. Приложение. Теоретический материал.

В пространстве можно рассматривать комбинированные векторные и скалярные произведения векторов.

Определение: Смешанным произведением трех векторов $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ называется скалярное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$, т. е. $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Построим на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ параллелепипед (рис. 13.2).

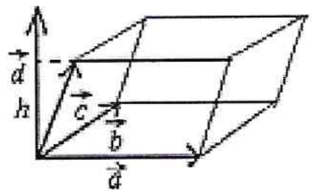

Рисунок 13.2 Построение параллелепипеда на векторах

Так как $|\vec{d}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $np_{\vec{d}}\vec{c}$ равна $\pm h$, где h - высота параллелепипеда, то смешанное произведение равно $\pm V$, где V – объем параллелепипеда. Таким образом, смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объем пирамиды, построенных на этих векторах будет равен

$$V=\frac{1}{6}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}).$$

Свойства смешанного произведения.

1) Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не меняется при их циклической перестановке, т. е.

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a})=(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b});$$

2) смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного произведений, т. е.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c});$$

3) смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух его векторов, т. е.

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=-(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b})=-(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c})=-(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b});$$

4) смешанное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда когда они компланарны.

Выразим значение смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ через их координаты. Пусть $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}=(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}=(x_3; y_3; z_3)$ Тогда $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$ и по свойствам векторного и скалярного произведений, имеем

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})=$$

$$\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\right)\cdot(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})=$$

$$\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot x_3-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot y_3+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot z_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Практическая работа № 14

Тема: Решение задач по аналитической геометрии.

1. **Цель:** Овладение практическими навыками и закрепление теоретических знаний по составлению уравнений прямой на плоскости, распознаванию кривых второго порядка по уравнению.

Знать:

- способы задания прямой на плоскости (уравнения: каноническое, параметрические, по двум заданным точкам, с угловым коэффициентом, общее);
- формулу для нахождения расстояния между двумя точками;
- канонические уравнения кривых II порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола);
- графики кривых II порядка.

Уметь:

- составлять уравнение прямой по двум данным точкам;
- составлять уравнение прямой с данным условным коэффициентом;

- составлять общее уравнение прямой;
- составлять параметрическое уравнение прямой;
- находить расстояние между двумя точками;
- строить прямую по заданному уравнению;
- приводить уравнения II порядка к каноническому виду и распознавать по ним кривые II порядка.

2. Литература: : Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3. Подготовка к работе:

3.1. Повторить способы задания прямой на плоскости.

3.2. Повторить формулу для нахождения расстояния между двумя точками.

3.3. Повторить построение прямой на плоскости.

4. Задание:

Даны координаты точек А, В, С составить:

4.1. Уравнения прямых проходящих через точки А, В и А,С;

4.2. Записать уравнение прямых АВ и АС в виде уравнения в отрезках;

4.3. Найти угловой коэффициент прямых АВ и АС;

4.4. Найти расстояние от точки В до С;

4.5. Построить прямые АВ и АС.

(Варианты заданий практической работы для пунктов 4.1-4.5 приведены в таблице 14.1)

4.6. Привести уравнения II порядка к каноническому виду, распознать по уравнениям кривые II порядка. Построить схематическое изображение полученных кривых II порядка. (Варианты заданий практической работы для пунктов 4.6 приведены в таблице 14.2)

Таблица 14.1 Варианты заданий к заданиям 4.1-4.5

Вариант	Точки и их координаты		
В-1	А(0;1)	В(-4;4)	С(9;-2)
В-2	А(2;6)	В(-6;-2)	С(8;3)
В-3	А(1;4)	В(-1;-5)	С(3;1)
В-4	А(3;0)	В(1;-6)	С(-6; 2)
В-5	А(5;-7)	В(-6;4)	С(-1;-3)
В-6	А(8;6)	В(-3;-2)	С(4;4)
В-7	А(9;-1)	В(-3;-2)	С(6;-3)
В-8	А(-6;2)	В(4;8)	С(1;-5)
В-9	А(-3;4)	В(4;2)	С(1;-3)
В-10	А(0;5)	В(-3;7)	С(8;-4)

Таблица 14.2 Варианты заданий к заданиям 4.6

Вариант 1 $4x^2+9y^2-32x-18y+37=0$	Вариант 2 $9x^2-4y^2+18x-16y+29=0$
Вариант 3 $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$	Вариант 4 $9x^2+16y^2+90x-64y+145=0$
Вариант 5 $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$	Вариант 6 $y^2+4y+6x+10=0$
Вариант 7 $x^2+y^2-3x+2y-3=0$	Вариант 8 $x^2-y^2+2x+2=0$
Вариант 9 $x^2+y^2-8x+2y+12=0$	Вариант10 $5x^2-30x-y+43=0$

5. Порядок выполнения:

Даны точки с координатами A(1;-2) B(0;4) C(-3;1)

5.1. Составим уравнение прямой проходящей через точки A и B.

Точки A и B заданы своими координатами, воспользуемся формулой уравнением прямой проходящей через две точки. Оно имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Подставим координаты точек A и B, получим: $\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+2}{4+2}$.

Выполним арифметические действия и получим уравнение прямой AB: $AB: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{6}$

Аналогично, составим уравнение прямой проходящей через точки A и C, для этого снова воспользуемся формулой $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, подставляя координаты точек A и C и выполнив арифметические действия получим уравнение прямой AC:

$\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y+2}{1+2}$, следовательно $AC: \frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{3}$

5.2. Уравнение прямой в отрезках имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Для преобразования к виду уравнения в отрезках, получим общее уравнение прямой и далее преобразуем к необходимому виду.

Составим общее уравнение прямых AB и AC

Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax+By+C = 0$,

Следовательно, что бы составить общее уравнение прямых AB и AC воспользуемся уравнениями полученными в пункте 5.1 и выполним элементарные преобразования, приведя уравнения к общему виду:

$AB: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{6}$	$AC: \frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{3}$
$6(x-1) = -1(y+2)$	$3(x-1) = -4(y+2)$
$6x - 6 = -y - 2$	$3x - 3 = -4y - 8$
AB: $6x + y - 4 = 0$	$AC: 3x + 4y + 5 = 0$

Получили общее уравнение прямой:

AB: $6x + y - 4 = 0$ и AC: $3x + 4y + 5 = 0$

Запишем уравнение AB и AC в отрезках, для этого преобразуем уравнения, полученные к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, получим

$$AB: 6x + y - 4 = 0$$

$$6x + y = 4 \quad | :4$$

$$\frac{6x}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

$$\frac{x}{2/3} + \frac{y}{4} = 1$$

Получили уравнение в отрезках для AB: $\frac{x}{2/3} + \frac{y}{4} = 1$

$$AC: 3x + 4y + 5 = 0$$

$$3x + 4y = -5 | : (-5)$$

$AC: \frac{x}{-5/3} + \frac{y}{-5/4} = 1$- получили уравнение в отрезках для AC.

5.3. Найдём угловой коэффициент прямых AB и AC. Для этого воспользуемся уравнением с угловым коэффициентом, которое имеет вид $y = kx + b$.

Уравнение AB имеет вид $AB: 6x + y - 4 = 0$, выразим y, получим $y = 4 - 6x, \quad k_{AB} = -6$. Так же преобразуем уравнение прямой AC и найдем её угловой коэффициент.

$$AC: 3x + 4y + 5 = 0; \quad 4y = -5 - 3x;$$

$$y = \frac{-5}{4} - \frac{3}{4}x, \quad k_{AC} = -\frac{3}{4}$$

5.4. Найти расстояние от точки B до точки C. Воспользуемся формулой для нахождения расстояния d от точки $A_1(x_1, y_1)$ до точки $A_2(x_2, y_2)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, подставим координаты в формулу и получим

$|BC| = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}; \quad |BC| = \sqrt{18}$

5.5. Построим прямые AB и AC в декартовой плоскости заданные своими координатами A(1;-2), B(0;4), C(-3;1) (рисунок 14.1).

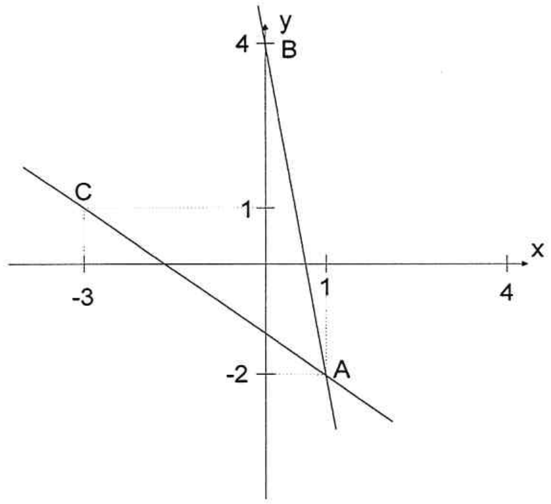

Рисунок 14.1 Прямые AB и AC в декартовой системе координат

5.6. Приведение уравнений к каноническому виду

1) Дано уравнение $x^2-2y-8x+6=0$. Привести уравнения II порядка к каноническому виду, распознать по уравнениям кривые II порядка и построить её.

Решение: Уравнение 2 порядка $x^2-2y-8x+6=0$, сгруппируем относительно x^2, получим $(x^2-8x)-2y+6=0$, дополним до полного квадрата и получим

$(x^2-2\cdot 4x+4^2)-4^2-2y+6=0$, свернем полный квадрат и получим $(x-4)^2-16-2y+6=0$

$(x-4)^2-10-2y=0$

$(x-4)^2=2y+10$

$(x-4)^2=2(y+5)$ (1)

Введём новые переменные в полученном уравнении (1), пусть $\begin{cases} x' = x-4 \\ y' = y+5 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = x'+4 \\ y = y'-5 \end{cases} \Rightarrow (x')^2 = 2y'$ –это уравнение параболы с центром в точке

(4;-5) и ветви параболы направлены симметрично оси Oy'. Построим данную параболу (рисунок 14.2)

2) Дано уравнение второго порядка $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$. Привести уравнения II порядка к каноническому виду, распознать по уравнениям кривые II порядка и построить её.

Решение: $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$, сгруппируем относительно x^2 и y^2, получим уравнение $(16x^2-64x)-(9y^2+18y)+199=0$, преобразуем

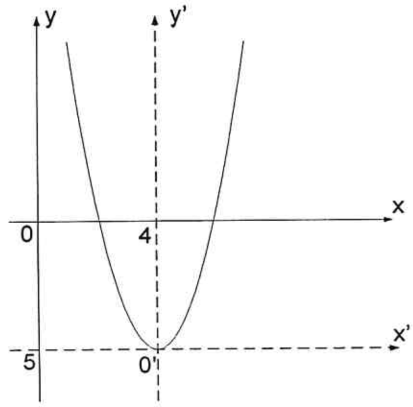

Рисунок 14.2 Парабола $(x')^2 = 2y'$

$16(x^2-4x)-9(y^2+2y)+199=0$, дополним до полного квадрата,

$16(x^2-2\cdot 2x+2^2)-2^2\cdot 16-9(y^2+2\cdot 1y+1^2)-1^2\cdot(-9)+199=0$, преобразуем

$16(x-2)^2-64-9(y+1)^2+9+199=0$

$16(x-2)^2-9(y+1)^2+144=0$

$16(x-2)^2-9(y+1)^2=-144$, получим 1 в правой части, для этого поделим на 144 обе части уравнения, получим $\frac{16(x-2)^2}{144}-\frac{9(y+1)^2}{144}=-1$, сократим дроби $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=-1$, представим в виде квадрата знаменатель, получим уравнение $\frac{(x-2)^2}{3^2}-\frac{(y+1)^2}{4^2}=-1$, умножим на (-1) обе части уравнения, что бы избавиться от минуса в правой части уравнения, получим уравнение $-\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{4^2}=1$. Введём новые переменные и преобразуем

$\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+2 \\ y = y'-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{-(x')^2}{3^2}+\frac{(y')^2}{4^2}=1$ - это уравнение гиперболы с центром (2;-1),с действительной осью Оу, мнимой осью Ох ; а=3, в=4, построим данную гиперболу (рисунок 14.3).

6. Контрольные вопросы:

6.1.Сколькими способами можно задать прямую на плоскости?

6.2.Какие существуют способы задания прямой на плоскости?

6.3.Как найти расстояние между точками?

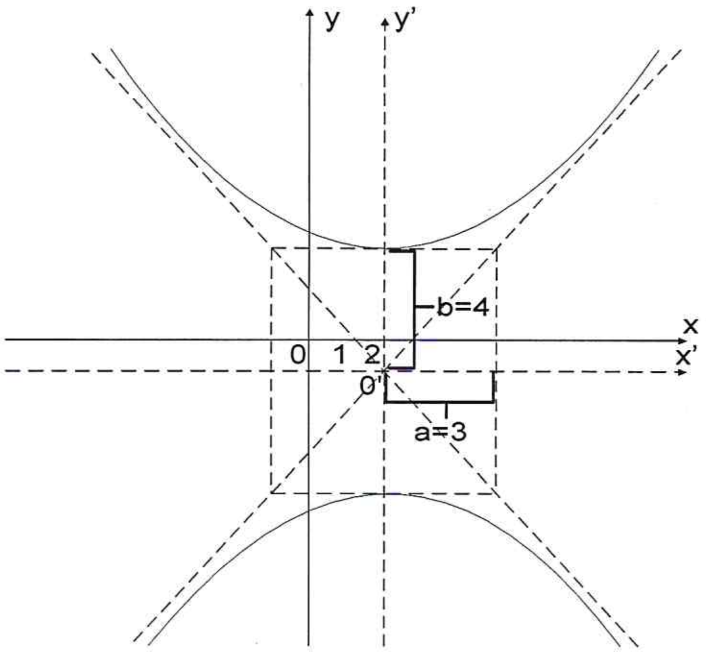

Рис. 2 Гипербола $\frac{-(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{4^2} = 1$

6.4.Как построить прямую на плоскости?

6.5 Определение кривых II порядка. Назовите канонические уравнения кривых II порядка.

6.6 Графики кривых II порядка.

6.7 Понятие асимптот, действительной и мнимой осей гиперболы.

6.8 Чем уравнение эллипса отличается от уравнения окружности?

6.9 Чем уравнение эллипса отличается от уравнения гиперболы?

Рекомендуемая литература

1) Григорьев В.П. Элементы высшей математики. – Москва: Академия, 2020. – 400 с.

2) Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – Москва: Академия, 2018. – 160 с.

3) Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 – х частях. Ч.1:Учебное пособие для вузов./ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко- 7-е изд., испр.,- М.: Мир и образование, 2015г.,368с.: ил.
4) Алашеева, Е. А. Математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие. Ч. 2 / Е. А. Алашеева ; ПГУТИ, Каф. ВМ. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 2,72 Мб). - Самара : ИНУЛ ПГУТИ, 2017. - Загл. с титул. экрана. - Электрон. версия печ. издания 2017 г. - Режим доступа: http://ellib.sibsutis.ru/irbis64r_12/test/index.html?param1=elib.
psuti.ru/Alasheeva_Matematika_Tsh2_utchebnoe_
posobie.pdf, по паролю.

Сборники задач

1) Растопчина О.М. Высшая математика [Электронный ресурс] : практикум / О.М. Растопчина. — Электрон. текстовые данные. — М. : Московский педагогический государственный университет, 2017. — 138 c. — 978-5-4263-0534-2. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/72486.html

Справочники

1) Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. -М.: Издательство АСТ, 2008.-991 с..

Интернет-ресурсы

1) Курс высшей математики. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Е. Богданов [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Институт водного транспорта имени Г.Я. Седова – филиал «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2014. — 99 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/57345.html
2) Информационно-справочная система «В помощь студентам». Форма доступа: http://window.edu.ru