

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»
(СибГУТИ)
ХАБАРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОКОММУНИКАЦИЙ (ФИЛИАЛ)
(ХИИК СибГУТИ)
СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ

по дисциплине

«МАТЕМАТИКА»

раздел «дифференцирование и интегрирование функции»

для студентов первого курса СПО

(базовый уровень)

часть 1

Хабаровск – 2023г

ББК - 22

Калиниченко Ю.А. Сборник задач по дисциплине «Математика» (часть 1) раздел «дифференцирование и интегрирование» для студентов первого курса всех специальностей среднего профессионального образования очной формы обучения (базовый уровень) – г.Хабаровск, ХИИК «СибГУТИ»; 2023 год

Содержит задания по основным разделам математического анализа: дифференциальному и интегральному исчислениям.

Сборник задач по дисциплине «Математика» может быть использован как для занятий под руководством преподавателя, так и для самостоятельной работы.

Рецензент:

преподаватель высшей категории

ПЦК ИСП

_____ (Райлян М.Н.)

г. Хабаровск, 2023 год

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Раздел 1. Дифференциальное исчисление	4
Раздел 2. Интегральное исчисление	17
ЛИТЕРАТУРА	27

РАЗДЕЛ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

▪ Производные элементарных функций

№ 1. Найти производную функции:

- | | | | |
|--------------------|-----------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 1) x^{10} ; | 6) $5x^2 + 2x^{15}$; | 11) $\sqrt[5]{x}$; | 16) $\sqrt[3]{x^7}$ |
| 2) x^6 ; | 7) $4x + 3x^7$; | 12) $\frac{1}{3\sqrt{x}}$; | 17) $\frac{3}{7x^6}$; |
| 3) $3x^4$; | 8) $9x^{-3}$; | 13) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$; | 18) $\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}$; |
| 4) $7x^3$; | 9) $\frac{1}{4}x^6$; | 14) $\frac{1}{2x^3}$; | 19) $2x\sqrt[3]{x^2}$; |
| 5) $\sqrt[3]{x}$; | 10) $-3x^{-4}$; | 15) $\frac{2}{x^4}$; | 20) $\frac{4}{x^4\sqrt{x^3}}$. |

№ 2. Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

- | | |
|---|---|
| 1) $f'(x) = 2x^3$ | 2) $f'(x) = -5x + 2$ |
| 1) $f'(x) = 4x - 1$ | 4) $f'(x) = 3x^2 - x$ |
| 5) $f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{x^2}$; | 6) $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$; |
| 7) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$; | 8) $f'(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$. |

№ 3. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $f'(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$; | 2) $f'(x) = (x - 2)^3 x \sqrt[3]{x}$ |
| 3) $f'(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$; | 4) $f'(x) = x^4 + 4x^2 - 8x^2 - 5$; |

№ 4. Решить уравнение $f'(x) = 1$, если:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1) $f'(x) = x^4 + 8x^3 + x - 3$; | 3) $f'(x) = 2x^5 + 5x^2 + x + 4$; |
| 2) $f'(x) = \frac{x^4 + x^3 + 81}{x^2}$ | 4) $f'(x) = \frac{x^3 + x^3 + 16}{x}$ |

№ 5. Решить неравенство $f'(x) > 0$, если:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) $f'(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; | 2) $f'(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$ |
| 3) $f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ | 4) $f'(x) = (x - 3)\sqrt{x}$ |

№ 6. Найти производную функции:

1) $e^x + \cos x$

2) $e^x - \sin x$

3) $\sin x - \sqrt[3]{x}$

4) $\sqrt{x} - \cos x$

5) $3 \sin x$

6) $-2 \cos x$

7) $\frac{3}{10}e^x$

8) $\frac{1}{2}\cos x$

9) $3x^5 - 8 \ln x$

10) $\frac{1}{4}x^8 + 3 \sin x$

11) $3\sqrt[3]{x} - 4 \cos x$

12) $\frac{5}{x} + 4e^x$

13) $6\sqrt[3]{x} + 5 \ln x$

14) $3x\sqrt[3]{x}$

15) $\frac{1}{x\sqrt{x}} + 5 \cos x$

16) $\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} - 4 \sin x$

17) $3x^2 - 4\sqrt[3]{x} + e^x$

18) $x^9 + 3x^{\frac{1}{9}} + 5 \ln x$

19) $3x^{\frac{5}{6}} - 5x^{-\frac{4}{5}} - \frac{1}{4}e^x$

20) $2x^8 - 4x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\sin x$

№ 7. Найти производную функции:

1) $e^x \cdot x^4$

2) $x^3 \cdot \sin x$

3) $\sin x \cdot \ln x$

4) $\sqrt{x} \cdot \cos x$

5) $\frac{\cos x}{x^3}$

6) $\frac{4x}{\ln x}$

7) $\frac{e^x}{5x}$

8) $\frac{7^x}{\sin x}$

№ 8. Найти производную функции:

1) $\frac{1}{5}x^2 + 2 \ln x - \cos x;$

2) $x^2(x - 1) + 3 \sin x + 4 \cos x;$

3) $x(x + 2)^2 + 2 \ln x - 3 \cos x;$

4) $(x + 3)(2x - 1) + e^x - \sin x;$

№ 9. Найти производную сложной функции:

1) $(x + 3)^8$

2) $\sqrt{3x + 5}$

3) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-4}}$

4) $\frac{1}{(x-1)^3}$

5) $\sqrt[5]{3-5x}$

7) $\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$

9) $\sin 5x$

11) $\ln 3x$

13) $e^{\frac{x}{4}}$

15) $\cos(-4x+1)$

17) $\sin(\frac{2x}{9}+5)$

19) $\cos \frac{1-x}{3}$

6) $\sqrt{3x+2}$

8) $\frac{5}{\sqrt[3]{2-9x}}$

10) $\sin(7x-2)$

12) e^{2x}

14) $\sin \frac{2x}{3}$

16) $\cos(5x-3)$

18) $\sin \frac{x+3}{2}$

20) $\ln(3x^2-4x)$

№ 10. Найти $f'(x_0)$, если:

1) $f(x) = 3x - 4x^2$, $x_0 = 2$

2) $f(x) = 3x^3 - 4x^2$, $x_0 = 1$

3) $f(x) = \sin x - 2$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$

4) $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$

5) $f(x) = e^x - 3x$, $x_0 = -1$

6) $f(x) = \frac{4}{x} + x^3$, $x_0 = 2$

№ 11. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если

1) $f'(x) = x - \cos x$;

2) $f'(x) = 3^{2x} - 2x \ln 3$;

3) $f'(x) = 2^x + 2^{-x}$;

4) $f'(x) = x + \ln(2x+1)$.

№ 12. Решить неравенство $f'(x) > 0$, если:

1) $f(x) = e^x - x$;

2) $f(x) = 6x + 3 \cos 3x$;

3) $f(x) = \ln x - x$;

4) $f(x) = x - 2 \ln x$;

5) $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$;

6) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 3x$

■ **Геометрический смысл производной**

№ 13. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 1$

2) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $x_0 = 3$;

4) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 1$;

$$5) f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}}, \quad x_0 = 0;$$

$$6) f(x) = \ln(2x + 1), \quad x_0 = 2.$$

№ 14. Найти угол между осью Оу и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

$$1) f(x) = x + e^{-x};$$

$$2) f(x) = \ln(2x + 1) + \frac{3}{x+1};$$

$$3) f(x) = x(x + 3) + \frac{2}{2x+1};$$

$$4) f(x) = \cos x;$$

$$5) f(x) = \sqrt{x+3} - \frac{3}{\sqrt{x+3}};$$

$$6) f(x) = \sqrt{x+1} + e^{\frac{x}{2}}.$$

№ 15. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $(x_0; y_0)$, если:

$$1) k = 2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1;$$

$$2) k = \frac{1}{3}, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0;$$

$$3) k = -3, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$4) k = -\frac{1}{2}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$$

$$5) k = -\frac{1}{2}, \quad x_0 = -2, \quad y_0 = -3;$$

$$6) k = -2, \quad x_0 = 3, \quad y_0 = -4;$$

$$7) k = \frac{2}{3}, \quad x_0 = \frac{1}{3}, \quad y_0 = \frac{1}{3};$$

$$8) k = 3, \quad x_0 = -2, \quad y_0 = 1.$$

№ 16. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ и образующей с осью Ох угол α , если:

$$1) \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = -3;$$

$$2) \alpha = \frac{\pi}{6}, \quad x_0 = 6, \quad y_0 = -5;$$

$$3) \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad x_0 = -2, \quad y_0 = -3;$$

$$4) \alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad x_0 = -1, \quad y_0 = -1;$$

$$5) \alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1;$$

$$6) \alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad x_0 = 4, \quad y_0 = -3;$$

$$7) \alpha = \frac{5\pi}{6}, \quad x_0 = -6, \quad y_0 = 4;$$

$$8) \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad x_0 = -3, \quad y_0 = 2.$$

№ 17. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

$$1) f(x) = x^3, \quad x_0 = 1;$$

$$2) f(x) = e^x, \quad x_0 = \ln 3;$$

$$3) f(x) = 3x^2 - 4x, \quad x_0 = 2;$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1;$$

5) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;

6) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

№ 18. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = x - 3x^2$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$;

4) $f(x) = -2x + x^2 - 4$, $x_0 = -1$;

5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

6) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;

7) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;

8) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

№ 19. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$:

1) $f(x) = x^5 - x^3 + 3x - 1$;

2) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 2$;

3) $f(x) = \sqrt{x+4}$;

4) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$;

5) $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$;

6) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$;

7) $f(x) = e^{2x} + \sin x$;

8) $f(x) = \sin 2x - \ln(x+1)$.

№ 20. На рисунке 1 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

№ 21. На рисунке 2 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

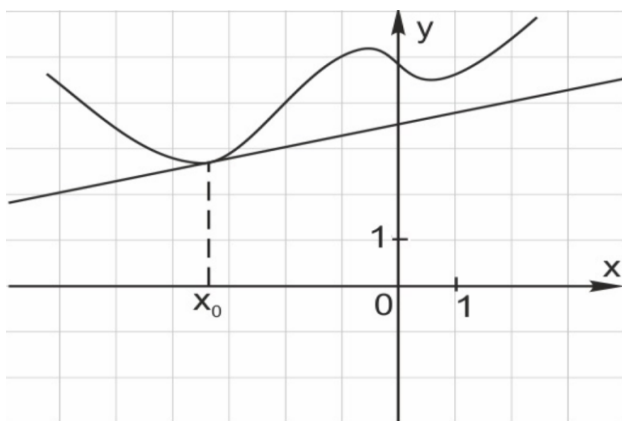


Рисунок 1

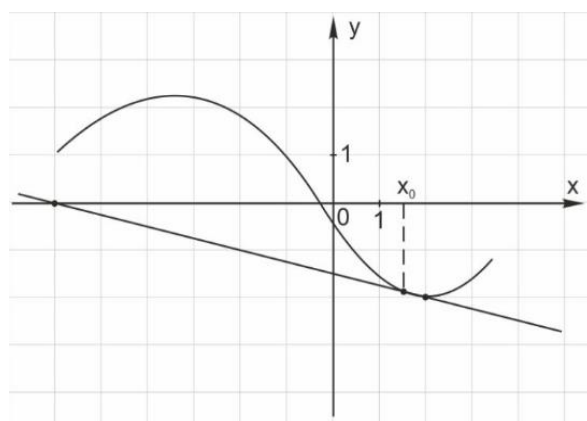


Рисунок 2

▪ **Физическое приложение производной**

№ 22. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$. Найти все величины скорости и ускорения в момент времени $t = 2$ с.

№ 23. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2 - 8t + 4$. Найти в какой момент времени t_0 скорость точки окажется равной нулю?

№ 24. Тело массой $m = 12$ кг. Движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 2t - 3$. Найдите кинетическую энергию тела $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 5 с. После начала движения. Здесь v – скорость тела.

№ 25. Зависимость температуры тела T от времени t задана уравнением

$T = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 10$ с?

№ 26. Сила тока $I(A)$ изменяется в зависимости от времени $t(c)$ по закону

$I = 3t^2 + 2t + 1$. Найдите скорость изменения силы тока через 8 с.

▪ **Исследование функции с помощью производной**

№ 27. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - 6x + 5$;

2) $y = 2x^2 - 4x + 5$

3) $y = -x^2 + 4x + 1$;

4) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

5) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$;

6) $y = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 20$;

7) $y = x^4 - 4x + 4$;

8) $y = -\frac{1}{4}x^4 - x - 1$;

9) $y = \frac{1}{2x}$;

10) $f(x) = \frac{1}{3x-2}$;

11) $y = \ln x^2$;

12) $y = \ln \frac{1}{x}$;

13) $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$;

14) $y = e^{-x}$;

15) $y = e^{\frac{1}{x}}$

16) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

№28. Найти стационарные точки 1-го рода:

1) $y = x^2 - 6x + 5$;

2) $y = x^2 - 14x + 15$;

3) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$;

4) $y = e^{2x} - 2e^x$;

5) $y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$;

6) $y = \frac{x}{3} + \frac{12}{x}$.

№29. Исследуйте функцию на экстремум:

1) $y = x^2 - 8x + 12$;

2) $y = x^2 - 10x + 9$;

3) $y = -x^2 + 2x + 3$;

4) $y = -2x^2 + x + 1$;

5) $y = 2x^4 - x$;

6) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x$;

7) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$;

8) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$;

9) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$;

10) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$;

11) $f(x) = e^x + e^{-x}$;

12) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

13) $f(x) = x - 2 \ln x$;

14) $f(x) = x \ln x$.

№30. Исследуйте на направление выпуклости кривую:

1) $y = -\frac{1}{x}$ в точках $x_1 = -1, x_2 = 1$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$ в точках $x_1 = -2, x_2 = 1$.

№31. Найдите промежутки выпуклости кривой:

1) $y = 2x^2$;

2) $y = x^2$;

3) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$;

5) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$;

6) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^3 - 12x^2 + 24x + 8$.

№32. Найдите точки перегиба кривой:

1) $f(x) = x^3 - x$;

2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$;

3) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18 - 48x + 31$;

4) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$.

№33. На рисунке 3 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 1$.

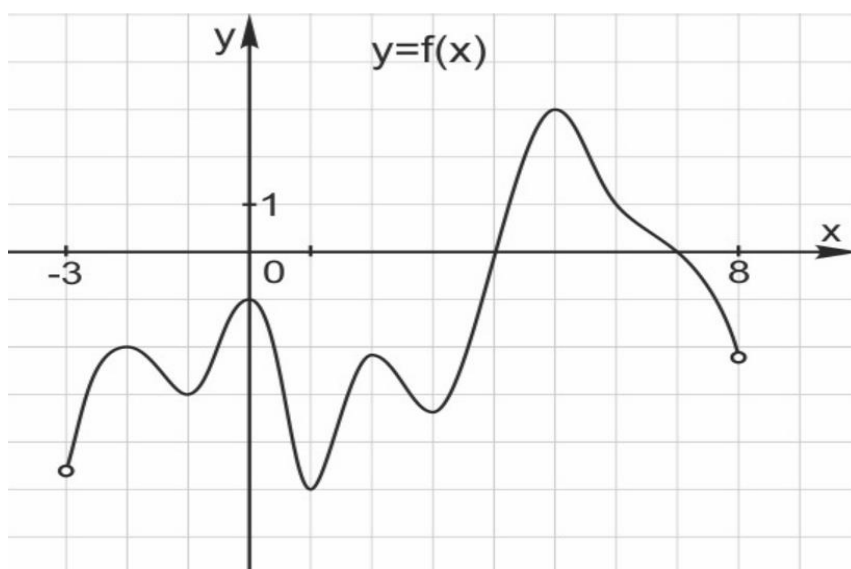


Рисунок 3

№34. На рисунке 4 изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.

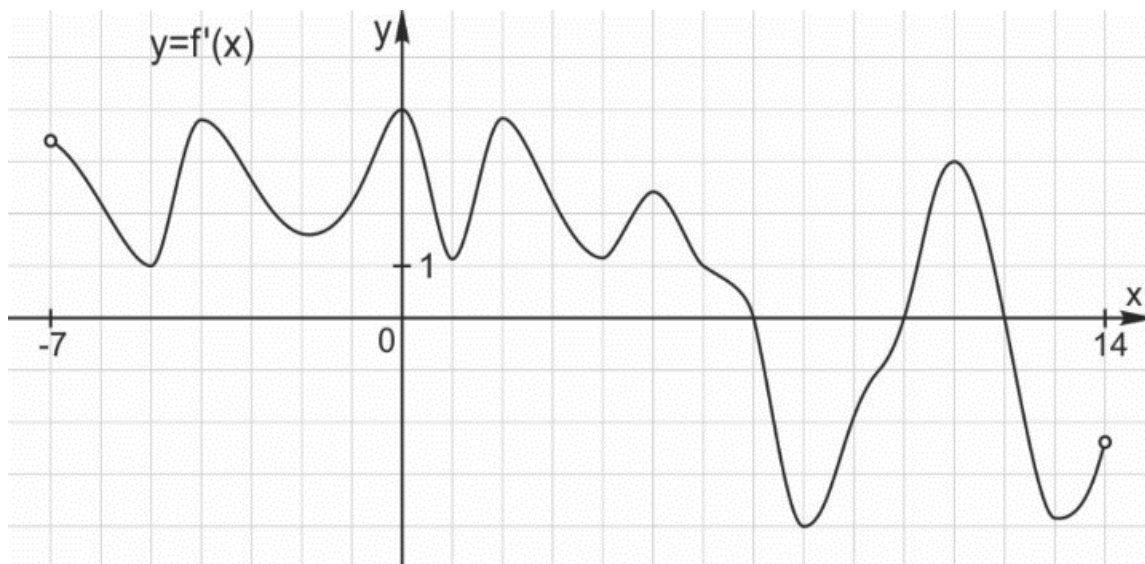


Рисунок 4

№35. На рисунке 5 изображен график $y=f'(x)$ - производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-13; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 6]$.

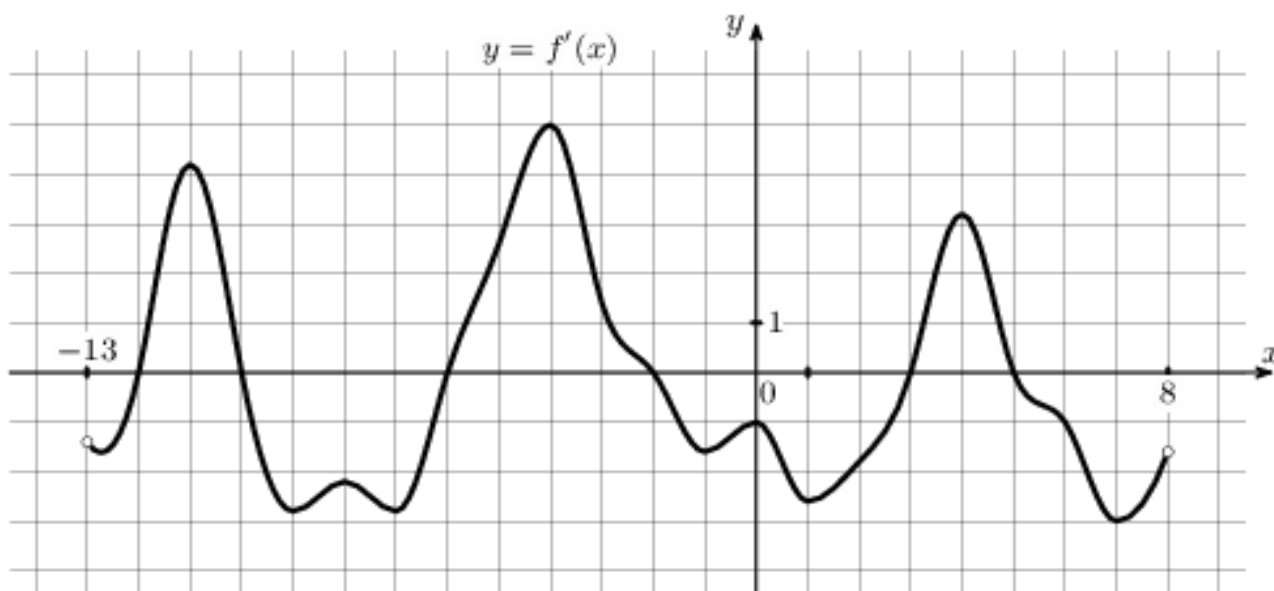


Рисунок 5

№36. На рисунке 6 изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13; 1]$.

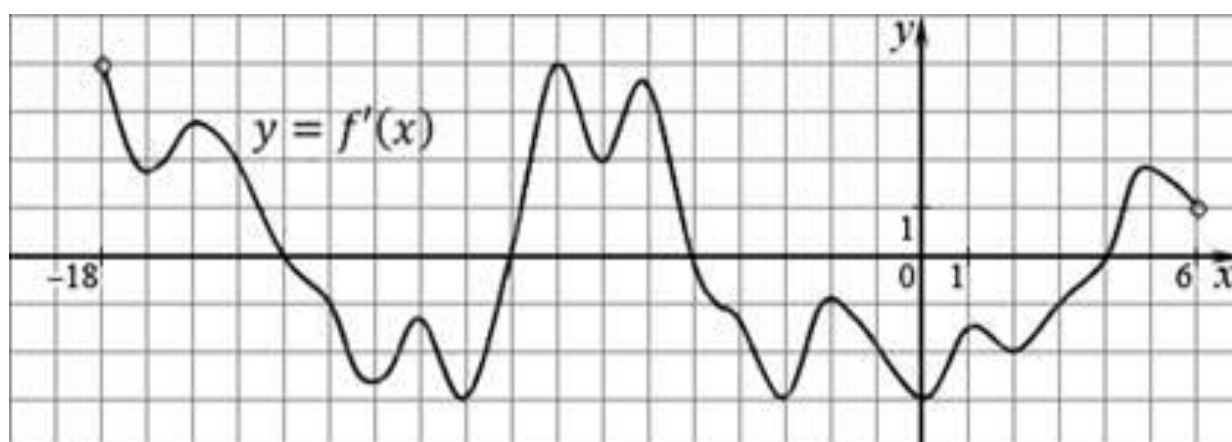


Рисунок 6

№37. На рисунке 7 изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 11]$.

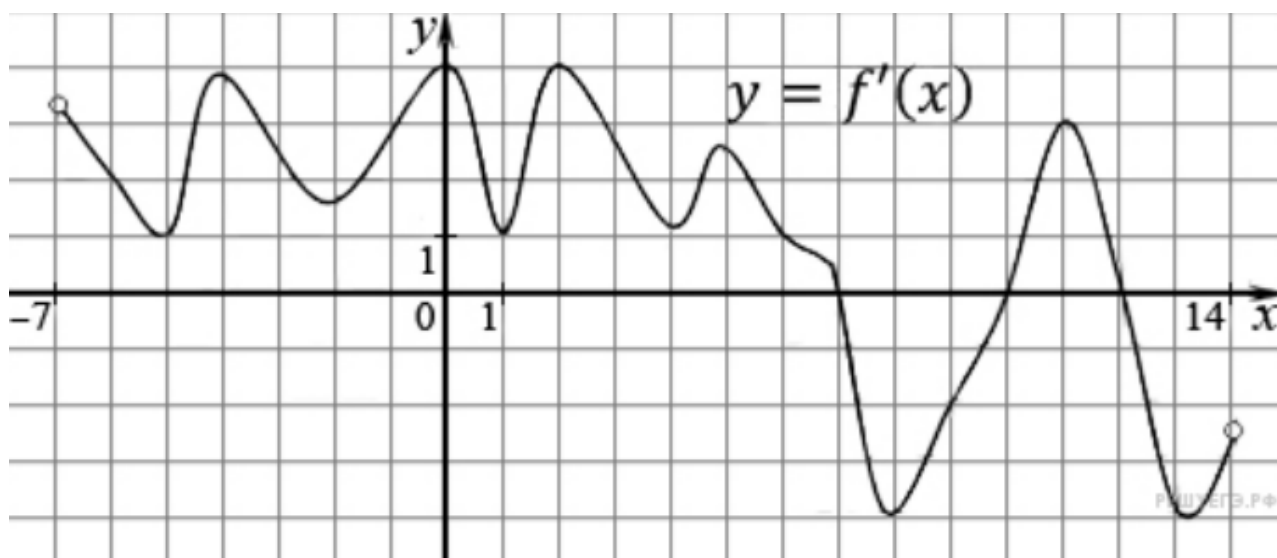


Рисунок 7

■ Применение производной к построению графиков функций

№38. Построить график функции:

1) $f(x) = 3 - 2x - 2x^2 - x^3$;

2) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$;

3) $f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$;

4) $f(x) = 1 - 2x + 2x^3 - x^5$;

5) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$;

6) $f(x) = 1 - 2x^2 - x^4$.

№39. Построить график функции:

1) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$;

2) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$;

3) $y = x^3 - x^2 - x + 1$;

4) $y = 2 + 3x - x^3$;

5) $y = -x^4 + 8x^2 - 16$;

6) $y = -x^3 + 4x^2 - 3$;

7) $y = \frac{1}{9}x^3(x + 4)$;

8) $y = \frac{1}{5}x^3(8 - 3x)$;

9) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$;

10) $y = 6x^4 - 4x^6$;

11) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$;

12) $y = 3x^5 - 5x^3$.

№40. Построить график функции:

1) $y = -2x - \frac{1}{2x}$;

2) $y = 3x + \frac{1}{3x}$;

2) $y = x - \frac{9}{x}$;

4) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

▪ **Наибольшее и наименьшее значения функции**

№41. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции в заданном промежутке:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = x^2 - 6x + 3, x \in [0; 5];$ | 2) $y = x^2 + 6x + 13, x \in [0; 6];$ |
| 3) $y = x^2 - 8x + 4, x \in [-2; 2];$ | 4) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, x \in [1; 3];$ |
| 5) $y = x - \frac{1}{4}x^2, x \in [-2; 4];$ | 6) $y = -x^3 + 9x^2 + 24x + 10, x \in [1; 3].$ |

№42. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции в заданном промежутке:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) $y = x + \frac{1}{x}, x \in [-2; -\frac{1}{2}];$ | 2) $y = x - \sqrt{x}, x \in [0; 4];$ |
| 3) $y = \ln x - x, x \in [\frac{1}{2}; 3];$ | 4) $y = x + e^{-x}, x \in [-1; 2].$ |

№43. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции в заданном промежутке:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = \sin x + \cos x, x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}];$ | 2) $y = \sin x + \cos x, x \in [0; \frac{\pi}{2}];$ |
| 3) $y = 3 \sin x + 4 \cos x, x \in [0; \frac{\pi}{2}];$ | 4) $y = \sin x + 2\sqrt{2} \cos x, x \in [0; \frac{\pi}{2}].$ |

№44. На рисунке 8 изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ $y = f'(x)$ принимает наименьшее значение?

№45. На рисунке 9 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

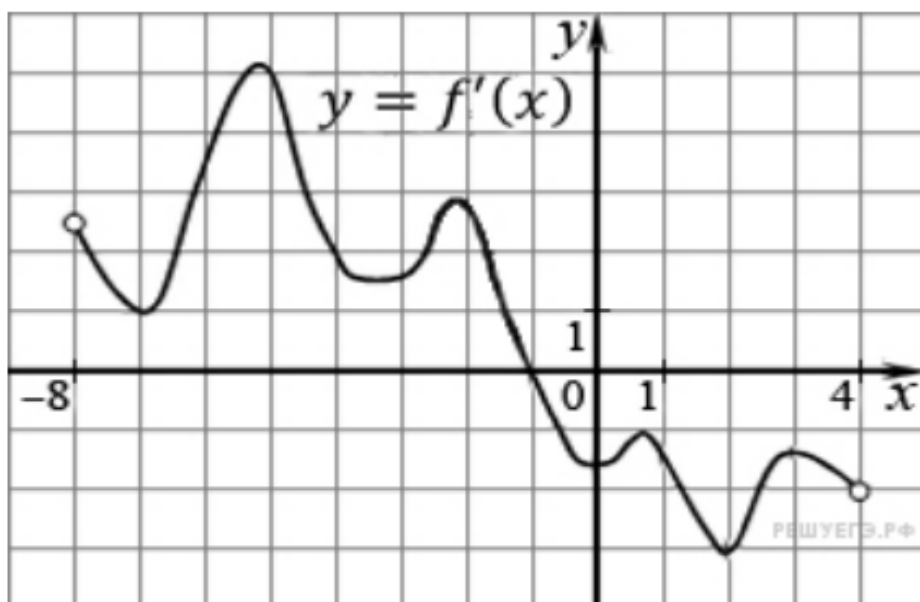


Рисунок 8

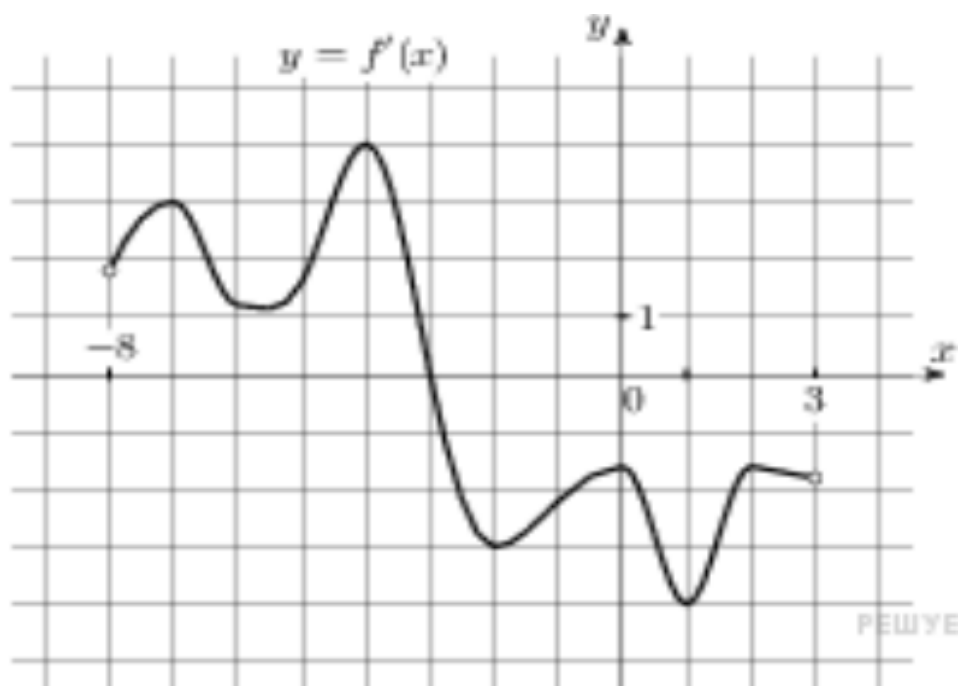


Рисунок 9

▪ **Дифференциал функции. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям**

№46. Найдите дифференциал функции:

1) $y = (1 - x)^5$;

2) $y = \sqrt{4 - 2x^2}$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$;

4) $y = \ln \cos 2x$;

$$5)y = \ln \operatorname{tg} 2x;$$

$$6)y = 2^{3x};$$

$$7)y = e^x \sin x;$$

$$8)y = 1 + e^x.$$

№47. Вычислите приближенное значение приращения функции:

$$1) y = 3x^2 + 5x + 1 \quad \text{при } x = 3, \Delta x = 0,001;$$

$$2) y = x^3 + x - 1 \quad \text{при } x = 2, \Delta x = 0,001;$$

$$3) y = 2x^2 + 3 \quad \text{при } x = 2, \Delta x = 0,001;$$

$$4) y = x^3 - 5x^2 + 80 \quad \text{при } x = 4, \Delta x = 0,001;$$

$$5) y = \ln x \quad \text{при } x = 10, \Delta x = 0,01;$$

$$6) y = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{при } x = R = 20, \Delta x = 0,01;$$

$$7) y = \sin 2x \quad \text{при } x = \frac{\pi}{6}, \Delta x = 0,02;$$

$$8) y = \ln x^2 \quad \text{при } x = 20, \Delta x = 0,01.$$

№48. Вычислите приближенное значение функции:

$$1)f(x) = 2x^2 - x + 1 \quad \text{при } x = 2,01;$$

$$2)f(x) = x^2 + 3x + 1 \quad \text{при } x = 3,02;$$

$$3) f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 \quad \text{при } x = 1,1;$$

$$4) f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{при } x = 0,001;$$

$$5) f(x) = x^4 - 1 \quad \text{при } x = -3,3;$$

$$6) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \quad \text{при } x = 1,1;$$

$$7) f(x) = x^3 - x^2 + x - 3 \quad \text{при } x = 3,03;$$

$$8) f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 1 \quad \text{при } x = 3,02.$$

№49. Вычислите приближенное значение степени:

$$1)(9,06)^2;$$

$$2)(1,012)^3;$$

$$3)\sqrt{99,5};$$

$$4)(1,005)^{10};$$

$$5)(0,975)^4;$$

$$6)(0,988)^3;$$

№50. Вычислите приближенное значение корня:

$$1)\sqrt[3]{1,012};$$

$$2)\sqrt{24,84};$$

$$3)\sqrt{99,5};$$

4) $\sqrt{25,16}$;

5) $\sqrt{101}$;

6) $\sqrt[10]{1,03}$.

РАЗДЕЛ 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2.1. Первообразная функции

№51. Найти первообразную для функции:

1) $4x + x^2$;

2) $5 - 2x$;

3) $x^5 - x^2 + 7$;

4) $6x^3 - x + 4$;

5) $-3x^4 + x^6$;

6) $\frac{1}{2}x + 4x^3 - 5$;

7) $8x^2 - \frac{1}{3}x + 2x^7$;

8) $-3x + \frac{4}{5}x^3 + 6$;

9) $\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$;

10) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}$;

11) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$;

12) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x}$.

№52. Найти первообразную для функции:

1) $3 \cos x - 4 \sin x$;

2) $2 \sin x + 5 \cos x$;

3) $3e^x - \sin x$;

4) $\frac{1}{4}e^x + 9 \sin x - 3$;

5) $1 + 3e^x - \cos x$;

6) $e^x - 2 \cos x$.

№53. Найти первообразную для функции:

1) $(4x + 5)^3$;

2) $(8x + 7)^5$;

3) $\left(\frac{1}{7}x - 1\right)^7$;

4) $(2x - 3)^{\frac{2}{5}}$;

5) $\sqrt{3 - 2x}$;

6) $\sqrt[3]{2 - 3x}$.

№54. Найти первообразную для функции:

1) $(4x + 5)^3$;

2) $\cos(5x - 2)$;

3) e^{-2x} ;

4) $\cos \frac{x}{2}$;

5) $\sin \frac{x}{3}$;

6) $\sin(-5x)$;

7) $\sin(2x + 3)$;

8) $e^{\frac{x}{7}}$;

9) $\sin\left(\frac{x}{4} + 5\right)$;

10) $\cos\left(3 - \frac{x}{5}\right)$;

11) e^{4+7x} ;

12) e^{3x-5}

№55. Найти первообразную для функции:

1) $e^{2x} - \cos 3x$;

2) $2 \sin \frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}}$;

3) $\sqrt{\frac{x}{5}} + 4 \sin(4x + 2)$;

4) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$.

№56 Найти первообразную для функции:

1) $(2x + 1)\sqrt{x}$;

2) $(3x - 2)\sqrt[3]{x}$;

3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$;

4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$.

№57. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку М

1) $f(x) = 2x + 3, M(1; 2)$;

2) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, M(-2; 2)$;

3) $f(x) = \sin 2x, M\left(\frac{\pi}{2}; 5\right)$;

4) $f(x) = \sqrt{x+2}, M(-2; -1)$;

5) $f(x) = \frac{1}{x+3}, M(-2; 4)$;

6) $f(x) = 4x - 1, M(-1; 3)$;

7) $f(x) = -x + x^2 + 1, M(1; 2)$;

8) $f(x) = \cos 3x, M(0; 0)$.

2.2. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование.

№58. Вычислить интеграл методом непосредственного интегрирования

1) $\int 3x^2 dx$;

2) $\int 4t^3 dt$;

3) $\int x^4 dx$;

4) $\int (2 + x^2) dx$;

5) $\int x^{(m-1)} dx$;

6) $\int \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^4}\right) dx$;

7) $\int \frac{dx}{x^2};$

8) $\int (\sin x - 5) dx;$

9) $\int (2x^2 - 1)^2 dx;$

10) $\int (3x^{-4} + 8x^5) dx;$

11) $\int x^3 \cdot (1 - 6x^2) dx;$

12) $\int (x^4 - x^{-3} - 3x^{-2} + 1) dx;$

13) $\int (3u^{3/2} - 7u^{3/4}) du;$

14) $\int 4^{2x} dx;$

15) $\int 5^x dx;$

16) $\int (3^x - e^x - 1) dx;$

17) $\int (e^x + 2x) dx;$

18) $\int \cos 4x dx;$

19) $\int \left(\frac{x^2 \cos x + \sqrt[3]{x^7}}{x^2} \right) dx;$

20) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$

21) $\int \sin 6x dx;$

22) $\int (4 - 3 \cos x) dx;$

23) $\int \frac{\cos x dx}{3 \sin x - 1};$

24) $\int \frac{\cos x dx}{3 + 2 \sin x};$

25) $\int \frac{\sin x dx}{2 - \cos x};$

26) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)};$

27) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x};$

28) $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}};$

29) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}};$

30) $\int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}};$

31) $\int \frac{dx}{25+x^2};$

32) $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

№ 59. Вычислить неопределенный интеграл методом замены переменной (способом подстановки)

1) $\int \sin 4x dx$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^3}};$

3) $\int \cos(6x - 4) dx$

2) $\int \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$

5) $\int (7 - 2x)^3 dx ;$

4) $\int \sin(3 - 2x) dx$

7) $\int \frac{dx}{(4-3x)^2};$

6) $\int (5t - 1)^4 dt;$

9) $\int \frac{dz}{(5z+1)^3};$

8) $\int \frac{dx}{(3x+1)^2};$

11) $\int \sqrt{2x - 1} dx;$

10) $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2} dx ;$

$$12) \int \sqrt[5]{(4t-3)^3} dt ;$$

$$15) \int 4(x^4 - 1) x^3 dx;$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}} ;$$

$$16) \int (x^2 + 3)^5 x dx$$

№ 60. Вычислить неопределенный интеграл методом замены переменной (способом подстановки)

$$1) \int \frac{6z^2 dz}{(1-2z^3)^4};$$

$$12) \int \frac{x}{x^2+5} dx;$$

$$3) \int \sqrt{e^x + 1} e^x dx ;$$

$$14) \int \frac{e^x}{3+e^x} dx;$$

$$5) \int \frac{x^3 dx}{(5x^4+3)^5} ;$$

$$15) \int \sqrt{2 \sin x + 1} \cdot \cos x dx;$$

$$7) \int \sqrt{(x^4 - 1)^3} \cdot x^3 dx;$$

$$17) \int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x}+1};$$

$$9) \int \sqrt{2 \sin x - 1} \cdot \cos x dx ;$$

$$19) \int \frac{\cos x dx}{2 \sin x + 1} ;$$

$$11) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}};$$

$$21) \int \sqrt{(3z^4 + 2)^3} \cdot z^3 dz;$$

$$13) \int \sqrt[3]{(1-3x^2)^4} \cdot x dx;$$

$$23) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(5x^4+2)^2}};$$

$$2) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$16) \int \cos 3x dx;$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}} ;$$

$$18) \int \operatorname{ctg} x dx;$$

$$6) \int \sin(5x + 7) dx;$$

$$20) \int \frac{\cos x}{4+3 \sin x} dx;$$

$$8) \int \operatorname{tg} x dx;$$

$$22) \int \cos^4 x \cdot \sin x dx;$$

$$10) \int \frac{x}{\sqrt{2x^2-5}} dx;$$

$$24) \int \sqrt[4]{(2-\sin x)^3} \cdot \cos x dx.$$

2.3. Геометрические и физические приложения неопределенного интеграла

№ 61. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $-3x$.

№ 62. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $x + 2$.

№ 63. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $-\frac{y}{x}$.

№ 64. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $\frac{x}{y}$.

№ 65. Составьте уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $-\frac{x}{y}$.

№ 66. Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен $\frac{x}{3}$.

№ 67. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку (1;4), если угловой коэффициент касательной к кривой в каждой точке равен $3x^2 - 2x$.

№ 68. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку (-1; 3), если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен утроенному квадрату абсциссы точки касания.

№ 69. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = t^2 - St + 2$. Найдите закон движения точки.

№ 70. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = 4t - St^2$. Найдите закон движения точки.

№ 71. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $v = 2t - 3$. Найдите закон движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь 6 м.

№ 72. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $v = 3t^2 + 4t - 1$. Найдите закон движения точки, если в начальный момент времени она находилась в начале координат.

№ 73. Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v = 2 \cos t$. Найдите закон движения точки, если в момент $t = \pi/6$ точка находилась на расстоянии $S = 4$ м от начала отсчета.

№ 74. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Найдите закон движения этого тела (сопротивлением воздуха пренебречь).

№ 75. Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 12t^2 + 6t$. Найдите закон движения точки, если в момент $t = 1$ с ее скорость $v = 8$ м/с, а путь $S = 6$ м.

№ 76. Точка движется прямолинейно с ускорением $a = -6t + 18$. В момент времени $t = 0$ (начало отсчета) начальная скорость $v_0 = 24$ м/с, расстояние от начала отсчета $S_0 = 15$ м. Найдите: 1) скорость и закон движения точки; 2) значения ускорения a , скорости v и пути S в момент $t = 2$ с; 3) максимальную скорость v_{max} и соответствующее время t_m когда скорость является наибольшей.

2.4. Определенный интеграл.

№ 77. Вычислить определенный интеграл

1) $\int_1^3 x^3 dx$

2) $\int_2^3 5x dx$

3) $\int_0^2 (2 + 4x) dx;$

4) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2) dx;$

5) $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3} dx;$

6) $\int_{-1}^1 (1 - \sqrt[3]{x^2}) dx;$

7) $\int_2^3 4x dx$

8) $\int_0^2 (2x + x^3) dx;$

9) $\int_1^4 (x^2 + 5x) dx$

10) $\int_{-1}^0 \left(x + 2 - \frac{1}{x^3} \right) dx;$

11) $\int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$

12) $\int_1^3 (x^2 - 3x - 4) dx;$

13) $\int_2^4 \left(\frac{2}{x} - 5x \right) dx;$

14) $\int_1^{16} (\sqrt{x} - 2) dx$

15) $\int_0^4 (1 - \sqrt{x}) dx$

16) $\int_1^2 \left(4 + \frac{3}{x} \right) dx.$

№ 78. Вычислить определенный интеграл

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx;$

3) $\int_0^{\pi} 3 \cos 4x dx;$

5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin \frac{x}{3} dx;$

7) $\int_0^{\pi} \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) dx;$

2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin 4x dx;$

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 5 \cos \frac{x}{2} dx;$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \left(\frac{x}{4} - \pi \right) dx;$

8) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{6}} 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) dx .$

№ 79. Вычислить определенный интеграл

1) $\int_0^1 e^{2x} dx;$

2) $\int_{-1}^1 e^{-4x} dx;$

3) $\int_1^2 e^{\frac{3x}{2}} dx;$

4) $\int_1^2 2e^{3x} dx;$

5) $\int_0^2 4e^{3x+2} dx;$

6) $\int_{-1}^3 \frac{e^{7x}}{5} dx.$

№ 80. На рисунке 10 изображён график функции $y=f(x)$ (являющийся ломаной линией, составленной из трёх прямолинейных отрезков). Пользуясь рисунком, вычислите $F(9) - F(5)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

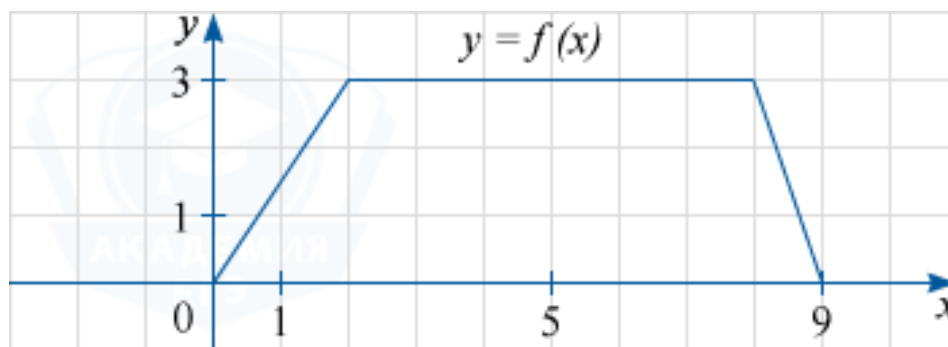


Рисунок 10

№81. На рисунке 11 изображён график функции $y=f(x)$ (являющийся ломаной линией, составленной из трёх прямолинейных отрезков). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(0)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

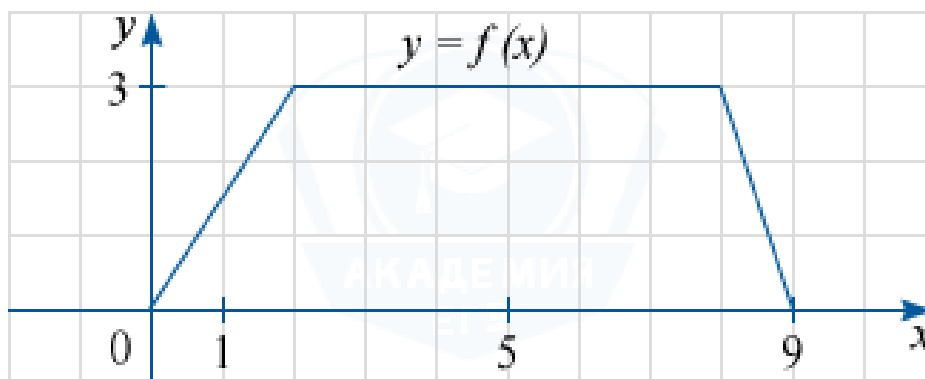


Рисунок 11

№82. На рисунке 12 изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(9) - F(3)$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$.

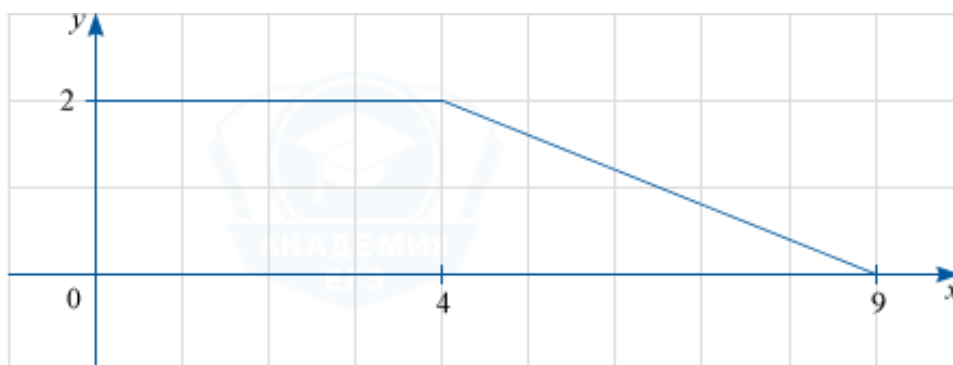


Рисунок 12

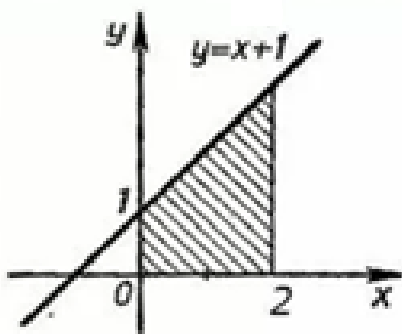
№ 83. Сделать чертеж и вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

- 1) $y = x + 2$, $x = 1$, $x = 3$ и осью Ox ;
- 2) $y = -2x + 1$, $x = -1$, $x = -3$, $y = 0$;
- 3) $y = 8x - x^2 - 7$ и осью Ox ;
- 4) $y = -x^2 + 4$ и осью Ox ;
- 5) $y = -x^2 + 2$ и осью Ox ;
- 6) $y = x^2 - 3$ и осью Ox ;
- 7) $y = (x - 2)^2 + 1$ и $y = x$;
- 8) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 0$;
- 9) $y = x^2 - 3x - 4$ и осью Ox ;
- 10) $y = x^2 - 6x + 8$ и осью Ox ;
- 11) $y = x^2$ и $y = x + 2$;
- 12) $y = 6x - 3x^2$ и осью Ox ;
- 13) $y = x^2 + 2$ и $y = 2x + 2$;
- 14) $y = x^2 - 4$, осью Ox , $x = 1$, $x = -1$

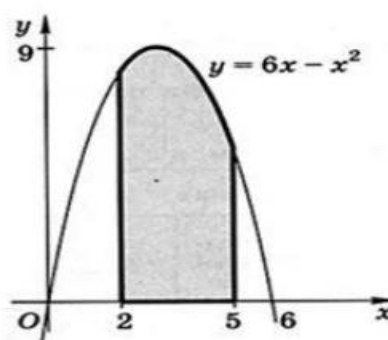
№ 84. Сделать чертеж и вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

- 1) графиком функции $y = \sqrt[3]{x}$, прямыми $x = -8$, $x = -1$ и осью Ox ;
- 2) графиком функции $y = \frac{1}{x^3}$, прямыми $x = -3$, $x = -1$ и осью Ox ;
- 3) графиком функции $y = \sin x$, прямыми $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{3}$ и осью Ox ;
- 4) графиком функции $y = \cos x$, прямыми $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \pi$ и осью Ox .
- 5) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x$;
- 6) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 1$, $x = -2$.

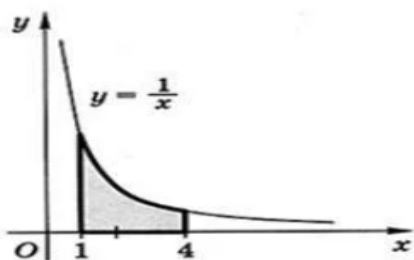
№85. Записать с помощью интегралов площади фигур, изображенные на рисунке 13:



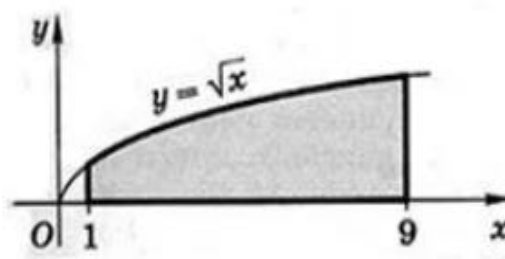
A)



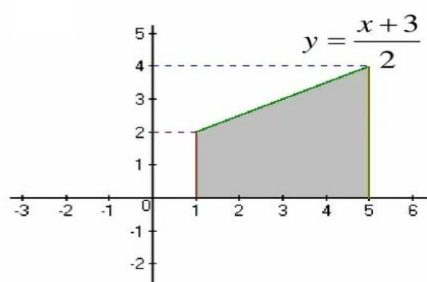
Б)



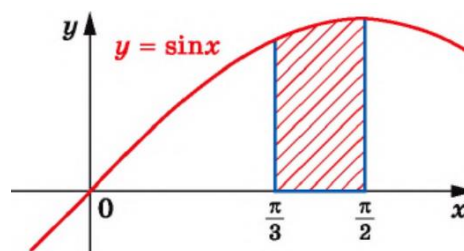
В)



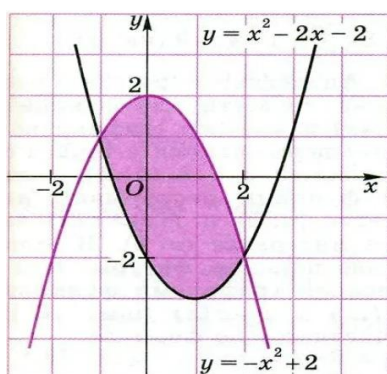
Г)



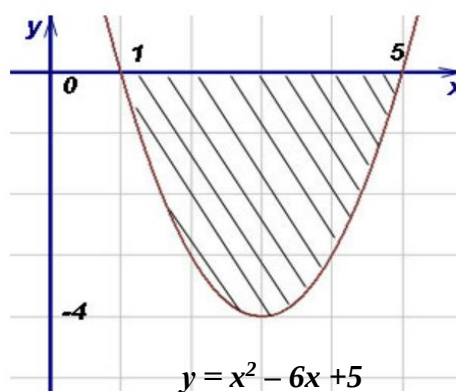
Д)



Е)



Ж)



3)

Рисунок 13 – Графики функций

№86. На рисунке 14 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 12x^2 + 51x - 3$ - одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

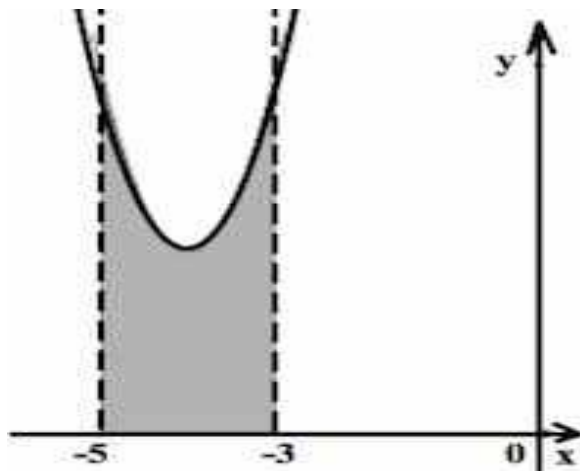


Рисунок 14

№87. На рисунке 15 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$ - одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

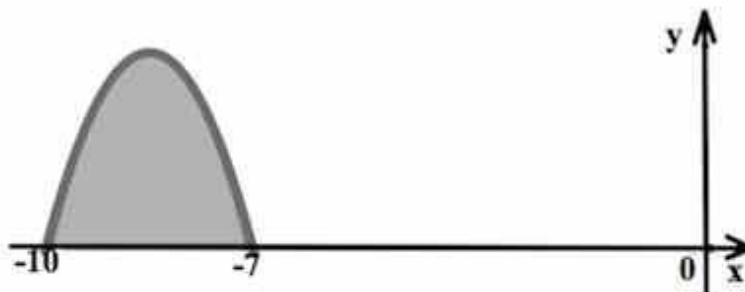


Рисунок 15

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений/ Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 464с.
- 2) Башмаков М.И. Математика: учебник – изд. 10-е, стер. – М. : Академия, 2015. – 256 с. (Общеобразовательная подготовка в учреждениях СПО)
- 3) Богомоллов Н.В. Сборник заданий по математике: Учеб. для ссузов / Н.В.Богомоллов, П.И.Самойленко. – М.: Дрофа, 2015. – 400с.
- 4) Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред. проф. учреждений / С.Г. Григорьев, С.В. Задулина; под ред. В.А. Гусева. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 384 с.
- 5) Глазков Ю.А. ЕГЭ. Математика. Решение задач группы В: универсальные материалы с методическими рекомендациями, решениями и ответами / Ю.А.Глазков, И.К.Варшавский, М.Я.Гаиашвили. – М.: Изд-во «Экзамен», 2021. – 397с