

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»  
(СибГУТИ)  
ХАБАРОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОКОММУНИКАЦИЙ (ФИЛИАЛ)  
(ХИИК СибГУТИ)  
СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

## **СБОРНИК ЗАДАЧ**

**по дисциплине**

## **«МАТЕМАТИКА»**

**для студентов первого курса СПО**

**(базовый уровень)**

**часть 2**

ББК - 22

Калиниченко Ю.А., Райлян М.Н. Сборник задач по дисциплине «Математика» (часть 2) для студентов первого курса всех специальностей среднего профессионального образования очной формы обучения (базовый уровень) – г.Хабаровск, ХИИК «СибГУТИ»; 2023 год

Содержит задания по разделам векторы на плоскости и в пространстве, планиметрия и стереометрия, элементы комбинаторики и теории вероятностей.

Рецензент:

преподаватель ХИИК СибГУТИ \_\_\_\_\_ (Кучина О.П.)

г. Хабаровск, 2023 год

## СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
<i>1. Векторы и координаты</i>	4
Тема 1.1 Векторы на плоскости	4
Тема 1.2 Векторы в пространстве	9
<i>2. Планиметрия</i>	13
<i>3. Геометрические тела и поверхности</i>	17
Тема 3.1 Многогранники	17
Тема 3.2 Тела вращения	23
<i>4. Площади поверхностей и объемы геометрических тел</i>	26
Тема 4.1 Площади поверхностей	26
Тема 4.2 Объемы геометрических тел	34
<i>5. Элементы комбинаторики и теории вероятностей</i>	36
Тема 5.1 Элементы комбинаторики	36
Тема 5.2 Элементы теории вероятностей	38
Литература	40

# 1. ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ

## Тема 1.1. Векторы на плоскости

№ 1. Перечертить векторы (см. рис.1) в тетрадь и построить на плоскости:

- |                         |                         |   |
|-------------------------|-------------------------|---|
| 1) $2\vec{c}$           | 6) $-3\vec{n}$          | 11) $\vec{b} + \vec{n}$                     |
| 2) $\frac{1}{3}\vec{c}$ | 7) $\frac{1}{2}\vec{m}$ | 12) $\vec{c} - \vec{n}$                     |
| 3) $\vec{a} + \vec{m}$  | 8) $\vec{a} - \vec{b}$  | 13) $\vec{b} + \vec{m}$                     |
| 4) $\vec{c} + \vec{m}$  | 9) $\vec{m} - \vec{a}$  | 14) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{n}$ |
| 5) $\vec{c} + \vec{b}$  | 10) $\vec{m} - \vec{c}$ | 15) $\vec{b} + \vec{c} + \vec{m}$           |

№ 2. Перечертить векторы (см. рис.2) в тетрадь и построить на плоскости:

- |                          |                                   |                                     |
|--------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $2\vec{b} + 3\vec{a}$ | 5) $2\vec{b} + 2\vec{n}$          | 9) $4\vec{b} - 3\vec{n}$            |
| 2) $-\vec{n} + \vec{b}$  | 6) $\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{m}$ | 10) $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{m}$ |
| 3) $2\vec{a} + \vec{c}$  | 7) $2\vec{b} + \vec{m} + \vec{n}$ | 11) $\vec{c} + 4\vec{b}$            |
| 4) $-\vec{m} - \vec{n}$  | 8) $\vec{a} + 2\vec{m} - \vec{c}$ | 12) $2\vec{m} - \vec{c}$            |

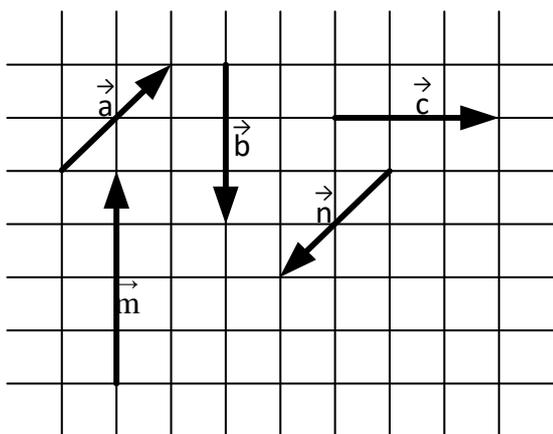


Рисунок 1

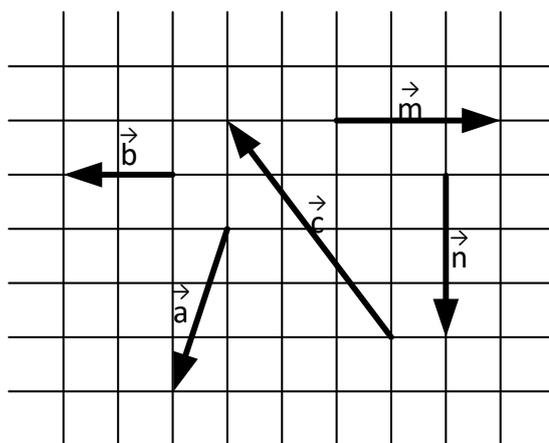


Рисунок 2

№3. Перечертить векторы (см. рис.3) в тетрадь и построить на плоскости:

- |                          |                        |
|--------------------------|------------------------|
| 1) $-2\vec{b}$           | 2) $\vec{a} + \vec{b}$ |
| 3) $-\frac{1}{2}\vec{n}$ | 4) $\vec{b} - \vec{m}$ |
| 5) $2\vec{a}$            | 6) $\vec{n} - \vec{a}$ |
| 7) $4\vec{m}$            | 8) $\vec{m} + \vec{c}$ |

№4. Перечертить векторы (см. рис.4) в тетрадь и построить на плоскости:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$ | 2) $2\vec{m} - \vec{a}$          |
| 3) $-3\vec{m}$                   | 4) $-\vec{b} + \vec{c}$          |
| 5) $\vec{b} - \vec{n}$           | 6) $\vec{a} + \vec{n} + \vec{m}$ |
| 7) $\vec{m} + 2\vec{c}$          | 8) $-\frac{\vec{a}}{2}$          |

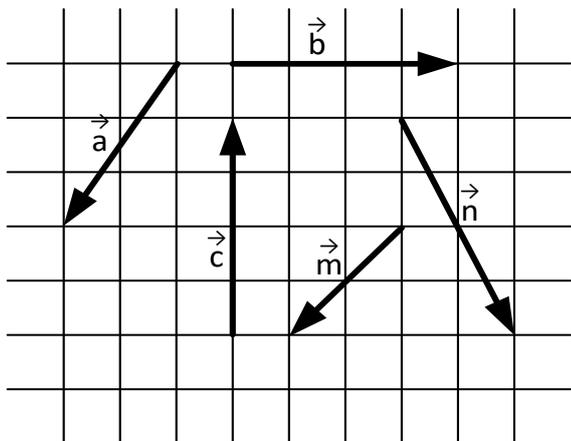


Рисунок 3

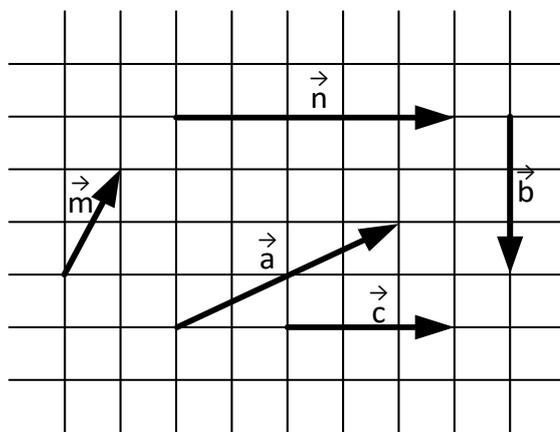


Рисунок 4

№ 5. Разложить векторы в базисе  $(\vec{i}, \vec{j})$ , если координаты векторов равны:

- |                         |                         |                          |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $\vec{a} = (-4; 7)$  | 4) $\vec{b} = (-2; 1)$  | 7) $\vec{c} = (-3; -8)$  |
| 2) $\vec{d} = (0; -5)$  | 5) $\vec{m} = (-1; 0)$  | 8) $\vec{k} = (6; 9)$    |
| 3) $\vec{n} = (2; -12)$ | 6) $\vec{a} = (-9; -5)$ | 9) $\vec{p} = (4; -0,8)$ |

№ 6. Найти координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если:

- 1)  $A(2; 4); B(0; 5)$
- 2)  $A(1; -2); B(-4; 3)$

3)  $A(-2; 4); B(-2; -7)$

4)  $A(-12; 4); B(-5; 8)$

№ 7. Выразить вектор  $\overrightarrow{AB}$  в базисе  $(\vec{i}, \vec{j})$ , если координаты начала и конца вектора соответственно равны:

1)  $A(-2; -5); B(-1; 9)$

9)  $A(8; -5); B(11; 2)$

2)  $A(7; 1); B(3; -7)$

10)  $A(4; -11); B(-3; 7)$

3)  $A(8; 13); B(5; -2)$

11)  $A(0; 6); B(5; -1)$

4)  $B(0; -1); A(7; 3)$

12)  $B(0; 4); A(5; -2)$

5)  $B(6; 8); A(-2; -7)$

13)  $B(9; -3); A(1; 12)$

6)  $A(-16; 10); B(7; -12)$

14)  $A(14; 1); B(7; 7)$

7)  $A(-6; 0); B(0; 4)$

15)  $B(0; 4); A(9; 13)$

8)  $A(-4; -3); B(5; 11)$

16)  $A(-8; -11); B(14; 7)$

№ 8. Найти координаты векторов  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{CB}$ , если:

1)  $B(-4; -2); C(7; 10)$

2)  $B(-1; 1); C(5; 0)$

3)  $B(0; 4); C(2; -1)$

4)  $B(3; 7); C(6; -1)$

5)  $B(5; 1); C(-6; 3)$

6)  $B(9; 3); C(-1; 4)$

№ 9. Даны векторы:

$$\vec{a} = (7; 4); \quad \vec{b} = (2; -9); \quad \vec{c} = (5; 6); \quad \vec{m} = (-3; 10); \quad \vec{n} = (4; 11)$$

Найти векторы:

1)  $\vec{a} + \vec{b}$

2)  $2\vec{m} + \vec{n}$

3)  $\vec{b} + \vec{c}$

4)  $\vec{a} + \vec{m}$

5)  $\vec{b} + \vec{n}$

6)  $\vec{c} + \vec{m}$

7)  $\vec{a} - \vec{b}$

8)  $\vec{n} - \vec{c}$

9)  $\vec{m} - 4\vec{n}$

10)  $\vec{a} - \vec{m}$

11)  $\vec{m} - \vec{b}$

12)  $\vec{c} + \vec{m}$

13)  $2\vec{m}$

14)  $-3\vec{n}$

15)  $\frac{1}{2}\vec{b}$

№ 10. Даны векторы:

$$\vec{a} = (2; 4); \quad \vec{b} = (-6; 1); \quad \vec{c} = (7; 2); \quad \vec{m} = (0; 10); \quad \vec{n} = (-4; -2)$$

Найти векторы и результат построить в плоскости XOY:

1)  $\vec{a} + \vec{m}$

2)  $2\vec{m}$

3)  $\vec{b} - \vec{c}$

4)  $2\vec{a} + \vec{b}$

5)  $-3\vec{n}$

6)  $\vec{c} - 2\vec{m}$

№ 11. Даны векторы:

$$\vec{a} = (3; 0); \quad \vec{b} = (4; 2); \quad \vec{c} = (-2; -3); \quad \vec{m} = (8; 3); \quad \vec{n} = (2; -1)$$

Найти векторы и результат построить в плоскости XOY:

1)  $\vec{b} + \vec{n}$

2)  $\vec{a} - \vec{m}$

3)  $3\vec{c}$

4)  $\frac{1}{2}\vec{b}$

5)  $2\vec{c} + \vec{m}$

6)  $3\vec{n} - \vec{a}$

7)  $2\vec{b} + 3\vec{c}$

8)  $\vec{m} - 4\vec{n}$

№ 12. Определить длину вектора:

1)  $\vec{a} = (4; 7)$

2)  $\vec{b} = (-2; 3)$

3)  $\vec{c} = (5; -5)$

4)  $\vec{m} = (-1; 0)$

5)  $\vec{n} = (2; 12)$

6)  $\vec{a} = (-3; -4)$

№13. Определить длину вектора  $|\overrightarrow{MN}|$ , если:

1)  $M(-3; 4); N(0; 5)$

2)  $M(4; 2); N(2; -5)$

3)  $M(-1; 1); N(-3; -4)$

4)  $M(2; 3); N(5; 7)$

5)  $M(-3; -4); N(7; 0)$

6)  $M(8; 0); N(4; 2)$

№14. Найти длины векторов, которые надо найти в задании № 9.

№15. Найти скалярное произведение векторов, если:

1)  $\vec{a} = (4; -2); \vec{b} = (-2; 1)$

2)  $\vec{a} = (2; 7); \vec{c} = (4; -2)$

3)  $\vec{a} = (-3; -1); \vec{m} = (-3; 4)$

4)  $\vec{m} = (-4; 3); \vec{h} = (2; 5)$

5)  $\vec{b} = (2; 1); \vec{c} = (-5; 7)$

6)  $\vec{a} = (3; 2); \vec{b} = (4; 0)$

№16. Найти скалярное произведение векторов, если:

1)  $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j}; \vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$

2)  $\vec{b} = 4\vec{i} - 6\vec{j}; \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$

3)  $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{j}$ ;  $\vec{m} = -\vec{i} + 5\vec{j}$

4)  $\vec{m} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$ ;  $\vec{h} = 6\vec{j}$

№17. Проверить, перпендикулярны ли векторы, если:

1)  $\vec{a} = (-3; 2)$ ;  $\vec{b} = (4; 6)$

2)  $\vec{a} = (2; 8)$ ;  $\vec{b} = (-4; 1)$

3)  $\vec{a} = (3; -7)$ ;  $\vec{b} = (5; 2)$

4)  $\vec{a} = (-1; 3)$ ;  $\vec{b} = (9; 3)$

5)  $\vec{m} = (4; 2)$ ;  $\vec{n} = (4; -8)$

6)  $\vec{m} = (10; 4)$ ;  $\vec{n} = (-2; 5)$

7)  $\vec{m} = (-6; 9)$ ;  $\vec{n} = (6; 4)$

8)  $\vec{m} = (10; -2)$ ;  $\vec{n} = (5; 4)$

№18. Вычислить угол между двумя векторами, если:

1)  $\vec{a} = (3; 3)$ ;  $\vec{b} = (4; -1)$

2)  $\vec{a} = (-2; 4)$ ;  $\vec{b} = (2; 3)$

3)  $\vec{a} = (2; -1)$ ;  $\vec{b} = (3; 7)$

4)  $\vec{a} = (4; -3)$ ;  $\vec{b} = (-5; 1)$

5)  $\vec{c} = (-3; 2)$ ;  $\vec{m} = (4; 6)$

6)  $\vec{c} = (1; 5)$ ;  $\vec{m} = (-2; 4)$

7)  $\vec{c} = (2; 3)$ ;  $\vec{m} = (-3; 1)$

8)  $\vec{c} = (4; 7)$ ;  $\vec{m} = (3; 2)$

№19. Найти угол между векторами  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{AB}$ , если:

1)  $M(3; 4)$ ;  $N(0; 5)$ ;  $A(2; -1)$ ;  $B(-3; 9)$

2)  $M(-4; 2)$ ;  $N(2; 5)$ ;  $A(-1; 0)$ ;  $B(0; -6)$

3)  $M(-1; 7)$ ;  $N(8; -4)$ ;  $A(4; 1)$ ;  $B(-1; 3)$

4)  $M(2; -3)$ ;  $N(-5; 5)$ ;  $A(-11; 10)$ ;  $B(5; 7)$

5)  $M(3; -4)$ ;  $N(-7; 0)$ ;  $A(5; 2)$ ;  $B(0; -6)$

6)  $M(8; 2)$ ;  $N(6; -2)$ ;  $A(8; 1)$ ;  $B(3; 5)$

№ 20. Найти косинусы углов, образованных заданным вектором  $\overrightarrow{AB}$  с осями координат, если начало и конец вектора заданы:

1)  $A(2; -3)$ ;  $B(1; 4)$

2)  $A(2; -1)$ ;  $B(3; 7)$

3)  $A(-4; 3)$ ;  $B(2; 5)$

4)  $B(0; 4)$ ;  $A(2; -1)$

- 5)  $B(4; 2); A(2; -5)$
- 6)  $A(-6; 1); B(7; 2)$
- 7)  $A(-6; 9); B(6; 4)$
- 8)  $A(4; -3); B(-5; 1)$

№ 21. Найти периметр треугольника, вершинами которого служат точки:

- 1)  $A(2; 0); B(5; 4); C(-3; 7)$
- 2)  $A(2; -1); B(3; 7); D(1; -4)$
- 3)  $A(-4; 3); B(2; 5); C(0; 1)$
- 4)  $B(0; 4); A(2; -1); C(-5; -8)$
- 5)  $M(4; 2); N(2; -5); P(-2; 7)$
- 6)  $M(-6; 1); N(7; 2); P(0; 0)$

### Тема 1.2. Векторы в пространстве

№ 22. Дано:  $A(3; -1; 0)$ ,  $B(0; 0; -7)$ ,  $C(2; 0; 0)$ ,  $D(-4; 0; 4)$ ,  $E(0; -1; 0)$ ,  $F(1; 2; 2)$ ,  $G(0; 5; -6)$ ,  $H(-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$

Указать: а) точки, лежащие на оси  $OX$ ; б) точки, лежащие в плоскости  $XOY$ ; в) точки, лежащие на оси  $OZ$ ; г) точки, лежащие в плоскости  $XOZ$ ; д) точки, лежащие в плоскости  $YOZ$ .

№ 23. Используя рисунок 5, определить координаты точек  $A, B, C, D, E$ .

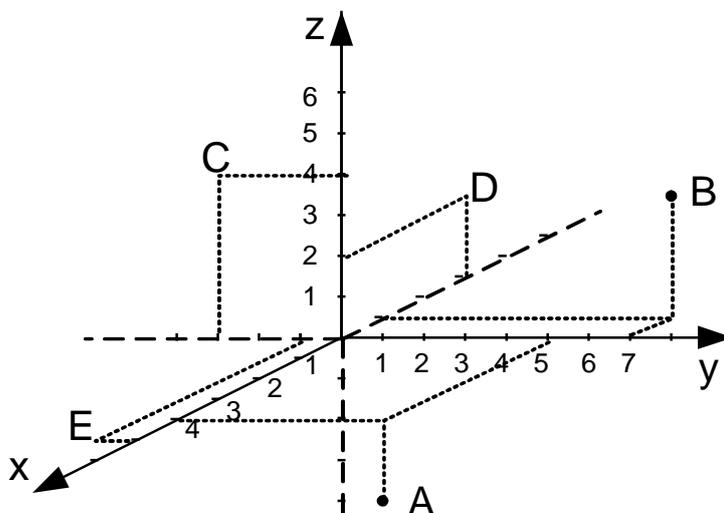


Рисунок 5

№ 24. Построить в пространстве  $OXYZ$  следующие точки и вектора:

- 1)  $\vec{a} = (-4; 7; 3)$     2)  $\vec{b} = (-2; 1; -5)$     3)  $M(2; 1; 3)$     4)  $F(1; -3; 2)$   
 5)  $\vec{d} = (0; -5; 4)$     6)  $\vec{m} = (-1; 0; 6)$     7)  $A(-2; 3; 1)$     8)  $D(3; 6; -2)$   
 9)  $\vec{n} = (2; -2; -5)$     10)  $\vec{c} = (3; 5; 4)$     11)  $B(4; -1; 5)$     12)  $C(-3; -5; 0)$

№ 25. Даны векторы:

$$\vec{a} = (-4; 5; 3), \vec{b} = (0; 1; -7), \vec{c} = (3; -1; 4), \vec{m} = (-1; 0; 6), \vec{n} = (2; -2; 0)$$

Разложить их в базисе  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

№ 26. Дано:

- 1)  $\vec{b} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}; \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$     2)  $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{k}; \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$   
 3)  $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}; \vec{m} = -\vec{i} + 5\vec{j}$     4)  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}; \vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

Укажите координаты векторов.

№ 27. Найти координаты вектора  $\overrightarrow{AC}$ , если:

- 1)  $A(-4; 0; -2); C(1; 7; 10)$     2)  $A(-1; 1; 5); C(5; 3; 0)$   
 3)  $A(0; 5; 4); C(2; -1; 8)$     4)  $A(3; 4; 7); C(0; 6; -1)$   
 5)  $A(4; 5; 1); C(-8; -6; 3)$     6)  $A(2; 3; -3); C(-1; 5; 4)$

№ 28. Найти длину вектора:

- 1)  $\vec{a} = (4; 7; -2)$     2)  $\vec{d} = (-2; 3; 1)$     3)  $\overrightarrow{AB}, A(-3; 1; 2); B(1; 2; 3)$   
 4)  $\vec{c} = (5; 0; -5)$     5)  $\vec{m} = (-1; 3; 0)$     6)  $\overrightarrow{AC}, A(0; 1; 5); C(-1; 2; 1)$   
 7)  $\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$     8)  $\vec{f} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$     9)  $\overrightarrow{AB}, A(2; -1; 4); B(1; 2; -3)$   
 10)  $\vec{b} = -2\vec{j} + 6\vec{k}$     11)  $\vec{p} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$     12)  $\overrightarrow{AB}, A(7; 0; 2); B(0; 2; 3)$

№ 29.

	Даны вектора:	Найти:
1)	$\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}; \vec{m} = (4; 3; -7)$	$\vec{c} = \vec{n} + \vec{m}$
2)	$\vec{a} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}; \vec{b} = (-2; 0; 1)$	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
3)	$\vec{m} = (4; 3; -7); \vec{a} = (-5; 9; 8)$	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{m}$

4)	$\vec{n} = (-1; 5; -8) ; \vec{p} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$	$\vec{c} = \vec{n} + \vec{p}$
----	---	-------------------------------

№ 30.

	Даны вектора:	Найти:
1)	$\vec{c} = 4\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k} ; \vec{a} = (3; -3; 7)$	$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$
2)	$\vec{a} = -5\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k} ; \vec{m} = (-2; 0; 3)$	$\vec{b} = \vec{a} - \vec{m}$
3)	$\vec{m} = (14; 3; -7) ; \vec{k} = (-5; 19; 8)$	$\vec{b} = \vec{k} - \vec{m}$
4)	$\vec{n} = (11; -5; -8) ; \vec{p} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$	$\vec{b} = \vec{n} - \vec{p}$

№ 31. Найти скалярное произведение векторов, если:

- 1)  $\vec{a} = (4; -2); \vec{b} = (-2; 1)$
- 2)  $\vec{a} = (2; 7); \vec{c} = (4; -2)$
- 3)  $\vec{a} = (-3; -1); \vec{m} = (-3; 4)$
- 4)  $\vec{m} = (-4; 3); \vec{h} = (2; 5)$
- 5)  $\vec{b} = (2; 1); \vec{c} = (-5; 7)$
- 6)  $\vec{a} = (3; 2); \vec{b} = (4; 0)$

№ 32. Найти скалярное произведение векторов, если:

- 1)  $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j}; \vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$
- 2)  $\vec{b} = 4\vec{i} - 6\vec{j}; \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$
- 3)  $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{j}; \vec{m} = -\vec{i} + 5\vec{j}$
- 4)  $\vec{m} = 8\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{h} = 6\vec{j}$

№33. Проверить, перпендикулярны ли векторы, если:

- 1)  $\vec{a} = (-3; 2); \vec{b} = (4; 6)$
- 2)  $\vec{a} = (2; 8); \vec{b} = (-4; 1)$
- 3)  $\vec{a} = (3; -7); \vec{b} = (5; 2)$
- 4)  $\vec{a} = (-1; 3); \vec{b} = (9; 3)$
- 5)  $\vec{m} = (4; 2); \vec{n} = (4; -8)$
- 6)  $\vec{m} = (10; 4); \vec{n} = (-2; 5)$

№ 34. При каком значении  $m$  векторы  $\vec{a} = (4; m; -6)$  и  $\vec{b} = (m; 2; -7)$  взаимно перпендикулярны?

№ 35. При каком значении  $m$  векторы  $\vec{c} = (m; 2; 7)$  и  $\vec{b} = (-6; 5; m)$  взаимно перпендикулярны?

№ 36. Вычислить угол между двумя векторами, если:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\vec{a} = (3; 3; 2); \vec{b} = (4; -1; 0)$ | 2) $\vec{a} = (-2; 4; 1); \vec{b} = (2; 3; 6)$ |
| 3) $\vec{a} = (2; -1; 2); \vec{b} = (3; 7; 9)$ | 4) $\vec{a} = (4; -3; -5); \vec{b} = (-5; 1)$  |
| 5) $\vec{c} = (-3; 2; 1); \vec{m} = (4; 6; 4)$ | 6) $\vec{c} = (1; 5; 1); \vec{m} = (-2; 0; 4)$ |
| 7) $\vec{c} = (2; 3; 4); \vec{m} = (-3; 1; 5)$ | 8) $\vec{c} = (4; 7; 0); \vec{m} = (3; -5; 2)$ |

№ 37. Найти угол между векторами  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{AB}$ , если:

- 1)  $M(3; 4; 3); N(0; 5; 8); A(2; -1; 1); B(-3; 9; 2)$
- 2)  $M(-4; 2; 7); N(2; 5; -9); A(-1; 0; 4); B(0; -6; 3)$
- 3)  $M(-1; 7; 1); N(8; -4; 0); A(4; 1; 3); B(-1; 3; 6)$
- 4)  $M(2; -3; 1); N(-5; 5; -2); A(-11; 10; 4); B(5; 7; 3)$
- 5)  $M(3; -4; 7); N(-7; 0; 1); A(5; 2; 9); B(0; -6; 1)$
- 6)  $M(8; 2; 2); N(6; -2; -1); A(8; 7; 1); B(0; 3; 5)$

№ 38. Найти косинусы углов, образованных заданным вектором  $\overrightarrow{AB}$  с осями координат, если начало и конец вектора заданы:

- 1)  $A(2; -3; 5); B(1; 4; 2)$
- 2)  $A(2; -1; 6); B(3; 7; 3)$
- 3)  $A(-4; 3; 7); B(2; 5; 7;)$
- 4)  $B(0; 4; 1); A(2; -1; 6)$

## 2. ПЛАНИМЕТРИЯ

№39. Периметр треугольника ABC равен 15 см. Сторона BC больше стороны AB на 2 см, а сторона AB меньше стороны AC на 1 см. Найдите стороны треугольника.

Ответ:  $AB=4$  см,  $AC=5$  см,  $BC=6$  см.

№40. В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 2 см, но меньше суммы боковых сторон на 3 см. Найдите стороны треугольника.

Ответ: 7 см, 5 см и 5 см.

№41. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 8 см, а одна из сторон больше каждой из других сторон соответственно на 3 мм, 4 мм и 5 мм.

Ответ: 23 мм, 20 мм, 19 мм и 18 мм

№42. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 66 см, первая сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей стороны, а четвертая - в три раза больше второй.

Ответ: 15 см, 7 см, 23 см и 21 см

№43. Найдите углы A, B и C выпуклого четырехугольника, если они равны друг другу.

Ответ: 75 градусов

№44. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 3 см больше другой; б) разность двух сторон равна 7 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.

Ответ: а) 10,5 см, 13,5 см; б) 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см

№45. Периметр параллелограмма ABCD равен 50 см, угол C=30 градусов, а перпендикуляр BH к прямой CD равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

Ответ: 13 см, 12 см, 13 см, 12 см.

№46. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

Ответ: 56 см или 70 см.

№47. В параллелограмме MNPQ проведен перпендикуляр NH к прямой MQ, причем точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что  $MH=3$  см,  $HQ=5$  см, угол  $MNH=30$  градусов.

Ответ:  $MN=PQ=6$  см,  $NP=QM=8$  см,  $\angle M=\angle P=60^\circ$ ,  $\angle N=\angle Q=120^\circ$ .

№48. На стороне AD прямоугольника ABCD построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причем точка M -

середина отрезка АЕ. Докажите, что  $S_{ABCD}=S_{ADE}$ . Указание: провести перпендикуляр  $EF$  к прямой  $BC$  и сначала доказать равенство треугольников  $ABM$  и  $EFM$ ,  $DCN$  и  $EFN$ .

№49. Найдите площадь квадрата, если сторона равна: а) 1,2 см; б)  $\frac{3}{4}$  дм; в)  $3\sqrt{2}$  м.

Ответ:  $1,44 \text{ см}^2$ ;  $\frac{9}{16} \text{ дм}^2$ ;  $18 \text{ м}^2$

№50. Найдите стороны прямоугольника, если:

а) его площадь равна  $250 \text{ см}^2$ , а одна сторона в 2,5 раза больше другой;

б) его площадь равна  $9 \text{ м}^2$ , а периметр равен 12 м.

Ответ: а) 25 см и 10 см; б) каждая сторона равна 3 м.

№51. Пол комнаты, имеющий форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6 м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина-5см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?

Ответ: 2200

№52. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 8 м и 18 м.

Ответ: 12 м.

№53. Пусть  $a$  - основание,  $h$  - высота, а  $S$  - площадь параллелограмма. Найдите:

а)  $S$ , если  $a=15 \text{ см}$ ,  $h=12 \text{ см}$ ; б)  $a$ , если  $S=34 \text{ см}^2$ ,  $h=8,5 \text{ см}$ ; в)  $a$ , если  $S=162 \text{ см}^2$ ,  $h=\frac{1}{2}a$ ; г)  $h$ , если  $h=3a$ ,  $S=27$ .

Ответ: а)  $180 \text{ см}^2$ ; б) 4 см; в) 18см; г)9.

№54. Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ:  $156 \text{ см}^2$ .

№55. Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен 150 градусов. Найдите площадь ромба.

Ответ:  $18 \text{ см}^2$ .

№56. Острый угол параллелограмма равен 30 градусов, а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ:  $12 \text{ см}^2$

№57. Стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведенная к стороне  $AB$ , равна 11 см. Найдите высоту, проведенную к стороне  $BC$ .

Ответ: 8 см.

№ 58. Пусть  $a$  и  $b$ -смежные стороны параллелограмма,  $S$ -площадь, а  $h_1$  и  $h_2$ -его высоты. Найдите: а)  $h_2$ , если  $a=10$  см,  $b=30$  см,  $h_1=6$  см,  $h_2>h_1$ ; б)  $h_1$ , если  $a=10$  см,  $b=15$  см,  $h_2=6$  см,  $h_2>h_1$ ; в)  $h_1$  и  $h_2$ , если  $S= 54$  см<sup>2</sup>,  $a=4,5$  см,  $b=6$  см.

Ответ: а) 10 см; б) 4 см; в) 12 см и 9 см.

№59. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 11 см; б) 1,2 дм и 3 дм.

Ответ: а) 22 см<sup>2</sup>; б) 1,8 дм<sup>2</sup>.

№60. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Вычислите площадь ромба, если его диагонали равны: а) 3,2 дм и 14 см; б) 4,6 дм и 2 дм.

Ответ: а) 224 см<sup>2</sup>; б) 4,6 дм<sup>2</sup>. *Указание: учесть, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.*

№61. Найдите площадь трапеции ABCD с основаниями AB и CD, если:

а) AB=21 см, CD=17 см, высота BH равна 7 см;

б) угол D=30°, AB= 2 см, CD=10 см, DA=8 см;

в) BC перпендикулярен AB, AB=5 см, BC=8см, CD=13 см.

Ответ: а) 133 см<sup>2</sup>; б) 24 см<sup>2</sup>; в) 72 см<sup>2</sup>

№62. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведенную к основанию.

Ответ: 15 см.

№63. Найдите диагональ и площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а другая диагональ-12 см.

Ответ: 96 см<sup>2</sup> и 16см.

№64. Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.

Ответ: 13 см и 120 см<sup>2</sup>.

№65. На рисунке (б) изображен квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу (1) в тетрадь и заполните пустые клетки ( $a_4$  - сторона квадрата, P - периметр квадрата, S - его площадь, r - радиус вписанной окружности).

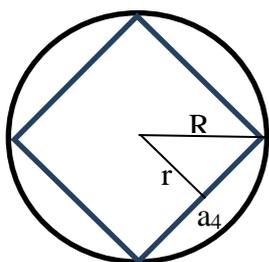


Рисунок 6

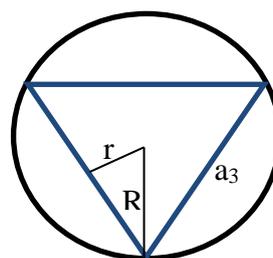


Рисунок 7

Таблица 1

<i>№</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	<i>a<sub>4</sub></i>	<i>P</i>	<i>S</i>
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

Таблица 2.

<i>№</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	<i>a<sub>3</sub></i>	<i>P</i>	<i>S</i>
1					
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

ОТВЕТЫ:

- 1)  $R = 3\sqrt{2}$ ,  $r = 3$ ,  $P = 24$ ,  $S = 36$ ;
- 2)  $R = 2\sqrt{2}$ ,  $a_4 = 4$ ,  $P = 16$ ,  $S = 16$ ;
- 3)  $r = 2\sqrt{2}$ ,  $a_4 = 4\sqrt{2}$ ,  $P = 16\sqrt{2}$ ,  $S = 32$ ;
- 4)  $R = 3,5\sqrt{2}$ ,  $r = 3,5$ ,  $a_4 = 7$ ,  $S = 49$ ;
- 5)  $R = 2\sqrt{2}$ ,  $r = 2$ ,  $a_4 = 4$ ,  $P = 16$ .

№66. На рисунке (7) изображен правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса  $R$ . Перечертите таблицу (2) в тетрадь и заполните пустые клетки ( $a_3$  - сторона треугольника,  $P$  - периметр треугольника,  $S$  - его площадь,  $r$  - радиус вписанной окружности).

ОТВЕТЫ:

- 1)  $r = 1,5$ ,  $a_3 = 3\sqrt{3}$ ,  $P = 9\sqrt{3}$ ,  $S = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ ;
- 2)  $R = \frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$ ,  $r = \frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$ ,  $a_3 = 2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$ ,  $P = 6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$
- 3)  $R = 4$ ,  $a_3 = 4\sqrt{3}$ ,  $P = 12\sqrt{3}$ ,  $S = 12\sqrt{3}$ ;
- 4)  $R = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ,  $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ,  $P = 15$ ,  $S = \frac{25\sqrt{3}}{4}$
- 5)  $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $a_3 = 2$ ,  $S = \sqrt{3}$ .

№67. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.

Ответ:  $2\sqrt{6}$  см.

№68. Перечертите таблицу и, используя формулу длины  $C$  окружности радиуса  $R$ , заполните пустые клетки таблицы.  $\pi = 3,14$

$C$			82	$18\pi$		6,28			$2\sqrt{2}$
$R$	4	3			07		101,5	$2\frac{1}{3}$	

Ответ: 1) 25,12; 2) 18,84; 3) 13,06; 4) 9; 5) 4,40 ; 6) 1; 7) 637,4; 8)14,65; 9) 0,45

№69. Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 2 раза; в) увеличить в  $k$  раз; г) уменьшить в  $k$  раз?

Ответ: а) увеличиться в 3 раза; б) уменьшится в 2 раза; в) увеличиться в  $k$  раз; г) уменьшиться в  $k$  раз.

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ

#### Тема 3.1 Многогранники

##### § 1. ПРИЗМА

№70. Какое число граней, вершин, ребер и боковых ребер имеют треугольная, четырехугольная и шестиугольная призмы?

№71. Сколько диагоналей имеют треугольная, четырехугольная, шестиугольная и  $n$ -угольная призмы?

№72. Сколько диагональных сечений можно провести через одно боковое ребро в треугольной, четырехугольной, шестиугольной и  $n$ -угольной призме?

№73. Сколько диагональных сечений можно провести через все боковые ребра в четырехугольной, шестиугольной и  $n$ -угольной призме?

№74. Чему равна сумма всех плоских углов треугольной, четырехугольной, шестиугольной и  $n$ -угольной призмы?

№75. Чему равна сумма всех двугранных углов, образованных боковыми гранями прямых призм: треугольной, четырехугольной, шестиугольной,  $n$ -угольной?

№76. В правильной шестиугольной призме сторона основания  $m$ , а боковые грани - квадраты. Найдите диагонали призмы и равна площади диагональных сечений.

№77. В правильной треугольной призме каждое ребро равно  $a$ . Рез сторону основания и середину оси проведена плоскость. Вычислите площадь сечения.

№78. В правильной четырехугольной призме диагональ основания равна  $m$ , а диагональ боковой грани равна  $n$ . Вычислите диагональ призмы.

№79. Дана правильная четырехугольная призма, сторона основания которой равна  $a$  и высота  $h$ . Вычислить кратчайшее расстояние от стороны основания до непересекающейся ее диагонали призмы.

*Решение:* Прямые  $AB$  и  $DB_1$  - скрещивающиеся. Ортогональная проекция двух скрещивающихся прямых на плоскость, перпендикулярную одной из них, изображается прямой и точкой. Расстояние между этой прямой и точкой равно расстоянию между скрещивающимися прямыми (рис. 8).

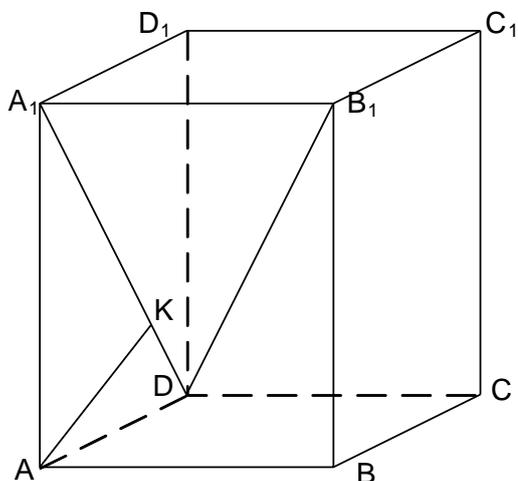


Рисунок 8

Спроецировав прямые  $AB$  и  $DB_1$  на грань  $AA_1D_1D$ , получим точку  $A = \text{пр}_{AA_1DD_1} AB$  и  $A_1D = \text{пр}_{AA_1DD_1} DB_1$

Расстояние между  $AB$  и  $DB_1$  равно расстоянию

от точки  $A$  до  $A_1D$ , т. е. высоте  $AK$  прямоугольного треугольника  $AA_1D$ :

$$AK = \frac{AD \cdot AA_1}{A_1D} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

№80. В правильной четырехугольной призме диагональ наклонена к боковой грани под углом  $30^\circ$ . Вычислите угол наклона ее к основанию.

№81. В правильной треугольной призме сторона основания равна 12 см, а боковое ребро равно  $10\sqrt{3}$  см. Вычислите площадь сечения, проходящего через боковое ребро перпендикулярно противоположной грани.

№82. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 13, 20 и 21 см, а высота призмы равна 25 см. Вычислите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

№83. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы и высота соответственно равны 8, 5 и 2 см. Вычислите сторону основания призмы.

№84. Вычислите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда с измерениями:

1) 12, 16, 21; 2) 2, 4, 6.

№85. Вычислите диагонали прямого параллелепипеда, каждое ребро которого равно  $a$ , а угол в основании равен  $60^\circ$ .

№86. В прямом параллелепипеде все диагонали равны. Докажите, что данный параллелепипед является прямоугольным.

№87. Найдите зависимость между ребром куба  $a$  и его диагональю  $d$ .

№88. Найдите зависимость между диагональю куба  $d$  и диагональю его грани  $d_1$ .

№89. Вычислите угол между диагональю куба и его основанием.

№90. Вычислите острый угол между диагоналями куба.

№91. Какой длины нужно взять проволоку для изготовления каркаса куба со всеми его диагоналями, если ребро куба равно 10 см?

№92. Ребро куба равно  $a$ . Найдите кратчайшее расстояние диагонали до не пересекающего ее ребра.

№93. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали.

№94. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если диагонали его граней соответственно равны 11, 19 и 20.

№95. В прямом параллелепипеде диагонали образуют с плоскостью основания углы  $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Стороны основания равны 17 и 31 см. Вычислите диагонали этого параллелепипеда.

№96. Вычислите площади диагональных сечений прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны  $a$  и  $b$ , а высота равна  $h$ .

№97. Грани параллелепипеда - равные ромбы со стороной  $a$  и углом  $60^\circ$ . Вычислите площади его диагональных сечений.

№98. Можно ли куб пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился треугольник: 1) разносторонний; 2) равнобедренный; 3) равносторонний; 4) прямоугольный?

№99. Ребро куба равно  $a$ . Вычислите площадь диагонального сечения.

№100. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Через середины трех его ребер  $A_1 B_1$ ,  $A_1 D_1$  и  $CD$  проведена плоскость. Докажите, что в сечении получится правильный шестиугольник. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно  $a$ .

№101. Ребро куба равно  $a$ . Найдите площадь сечения куба плоскостью, проведенной через середины трех ребер, выходящих из одной вершины.

№102. Вычислите периметр и площадь сечения, проходящего через концы трех ребер, выходящих из вершины куба. Ребро куба равно  $a$ .

№103. В треугольной наклонной призме расстояния между боковыми ребрами

равны 20, 34 и 42 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противоположным ей боковым ребром.

№104. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб  $ABCD$ , в котором  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ ; боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом  $60^\circ$  и плоскость  $AA_1C_1C$  перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что площади сечений  $BB_1D_1D$  и  $AA_1C_1C$  относятся, как 2:3.

№105. Основание наклонного параллелепипеда - квадрат со стороной  $a$ , одна из вершин другого основания проецируется в центр этого квадрата; высота параллелепипеда равна  $H$ . Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

## § 2. ПИРАМИДА. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

№106. По стороне основания  $x$  и боковому ребру  $y$  найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

№107. По стороне основания  $x$  и высоте  $y$  найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

№108. По стороне основания  $x$  и высоте  $h$  найдите боковое ребро правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

№109. В правильной шестиугольной пирамиде двугранный угол при стороне основания равен  $60^\circ$ , сторона основания равна  $x$ . Найдите высоту и апофему пирамиды.

№110. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно  $m$  и образует с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Вычислите сторону основания пирамиды.

№111. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна  $h$ ; боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом  $\alpha$ . Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

№112. В правильной четырехугольной пирамиде угол между высотой и боковым ребром равен  $40^\circ$ ; сторона основания пирамиды равна  $b$  см. Вычислите длину бокового ребра пирамиды.

№113. В правильной треугольной пирамиде угол между высотой и боковым ребром равен  $30^\circ$ ; сторона основания пирамиды равна  $l$  см. Вычислите высоту пирамиды.

№114. По стороне основания  $x$  и боковому ребру  $b$  правильной треугольной пирамиды вычислите площадь сечения, проведенного

через боковое ребро и высоту пирамиды ( $x = 9\text{м}$ ,  $b = 22\text{м}$ ).

№115. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  боковое ребро равно  $b$  и наклонено к плоскости основания под углом  $\alpha$ . Через середины ребер  $AB$  и  $BC$  проведена плоскость параллельно ребру  $SB$ . Вычислите площадь полученного сечения.

№116. Найдите площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна  $x$ , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол  $\beta$ .

№117. Найдите площадь сечения, проведенного в правильной четырехугольной пирамиде через диагональ основания параллельно боковому ребру. Сторона основания пирамиды равна  $x$ , а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом  $\beta$ .

№118. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен  $\varphi$ . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

№119. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 9 см, боковое ребро равно 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных боковых ребер перпендикулярно основанию пирамиды.

№120. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые ребра составляют с плоскостью основания угол  $60^\circ$ .

№121. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 12 и 16 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 26 см. Найдите высоту пирамиды.

№122. Основание пирамиды - треугольник со сторонами 20, 21 и 29 см. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания углы в  $45^\circ$ . Найдите высоту пирамиды.

№123. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник. Две боковые грани, проходящие через один из катетов и гипотенузу треугольника, перпендикулярны плоскости основания. Докажите, что все боковые грани этой пирамиды являются прямоугольными треугольниками.

№124. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 3 и 7 см, а одна из диагоналей равна 6 см. Высота пирамиды равна 4 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

№125. Основание пирамиды - ромб, у которого сторона и одна из диагоналей равны 4 см. Высота пирамиды равна большей диагонали основания и проходит через вершину острого угла ромба. Вычислите площадь сечения, проходящего через меньшую диагональ основания перпендикулярно большему боковому ребру пирамиды.

№126. Три последовательных угла основания четырехугольной пирамиды относятся, как 2:3:4; боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Найдите плоские углы в основании.

№127. Основание пирамиды - равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона равна 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по  $45^\circ$ . Вычислите высоту этой пирамиды.

№128. Через середину высоты пирамиды проведено сечение, параллельное основанию. Найдите площадь сечения, если площадь основания равна  $S$ .

№129. В каком отношении сечение, параллельное основанию, делит высоту пирамиды, если площадь сечения равна: 1)  $1/2$  площади основания; 2)  $1/4$  площади основания; 3)  $m/n$  площади основания?

№130. Высота пирамиды разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна  $400 \text{ см}^2$ . Вычислите площади полученных сечений.

№131. Высота пирамиды 36 см; площадь основания  $400 \text{ см}^2$ . На каком расстоянии от основания находится сечение с площадью  $100 \text{ см}^2$ , параллельное основанию?

№132. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 2:5 (считая от вершины пирамиды); площадь сечения меньше площади основания пирамиды на  $189 \text{ см}^2$ . Найдите площадь сечения.

№133. Вычислите высоту правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно,  $x$  и  $y$ , а боковое ребро равно  $s$ .

№134. Сколько диагоналей можно провести в усеченной  $n$ -угольной пирамиде?

№135. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны большего и меньшего оснований равны  $x$  и  $y$ , а боковое ребро образует с основанием угол  $60^\circ$ . Найдите высоту пирамиды.

№136. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 10 и 2 дм, а высота ее 2 дм. Найдите боковое ребро пирамиды.

№137. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 36 см, апофема равна 45 см, а стороны оснований относятся, как 1:4. Найдите эти стороны.

№138. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 7 см, а стороны оснований равны 3 и 5 см. Найдите диагональ этой усеченной пирамиды.

№139. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны  $x$  и  $y$  ( $x > y$ ), а боковое ребро образует с основанием угол  $45^\circ$ . Вычислите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту основания.

## Тема 4.2 Тела вращения

### § 1. ЦИЛИНДР

№140. Радиус основания цилиндра 3 см, высота 8 см. Найдите длину диагонали осевого сечения и острый угол ее наклона к плоскости основания.

№141. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26 см, высота цилиндра равна 24 см. Найдите площадь основания цилиндра.

№142. Радиус основания цилиндра 13 см, его высота 20 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 5 см от нее.

№143. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в  $60^\circ$ . Высота цилиндра равна 15 см, расстояние секущей плоскости от оси цилиндра равно 3 см. Вычислите площадь сечения.

№144. Диагональ осевого сечения равностороннего цилиндра (в осевом сечении — квадрат) равна  $a$ . Найдите площадь полной поверхности вписанной в этот цилиндр шестиугольной призмы.

№145. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как  $\pi:2$ . Найдите острый угол между диагоналями осевого сечения.

№146. Все вершины равнобедренного треугольника, основание которого равно 12 см, а высота равна 4 см, лежат на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна основанию треугольника и образует с его плоскостью угол  $30^\circ$ . Найдите радиус цилиндрической поверхности.

№147. Все вершины квадрата со стороной 1 лежат на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна стороне квадрата и образует с его плоскостью угол  $\alpha$ . Вычислите радиус цилиндрической поверхности.

№148. Около цилиндра радиуса  $r$ , осевое сечение которого квадрат, описана правильная треугольная призма. Вычислите площадь ее боковой поверхности.

№149. Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см, боковое ребро 10 см. Вычислите площади осевых сечений вписанного в призму и описанного около призмы цилиндров.

№150. В правильной треугольной призме боковое ребро равно  $a$ ;

отрезок, соединяющий середину бокового ребра с центром основания, составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Вычислите площадь осевого сечения, вписанного в призму цилиндра.

## § 2. КОНУС. УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

№151. Радиус основания конуса 5 см, его высота 12 см. Найдите площадь осевого сечения, длину образующей и угол ее наклона к плоскости основания.

№152. Площадь осевого сечения конуса равна  $48 \text{ см}^2$ , его образующая составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найдите площадь основания конуса.

№153. Радиус основания конуса 6 см, его высота 12 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси конуса на расстоянии 2 см от нее.

№154. В конусе проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в  $120^\circ$ . Высота конуса равна 12 см, расстояние секущей плоскости от оси конуса равно 3 см. Вычислите площадь сечения.

№155. Радиус основания конуса равен  $R$ . Вычислите площадь параллельного сечения, делящего высоту конуса в отношении  $m:n$  (от вершины к основанию).

№156. В равностороннем конусе (в осевом сечении — правильный треугольник) радиус основания равен  $R$ . Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен  $60^\circ$ .

№157. Высота конуса равна  $H$ . Угол между высотой и образующей равен  $30^\circ$ . Вычислите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен  $60^\circ$ .

№158. Радиус основания конуса равен  $R$ , высота его равна  $h$ . Вычислите площадь сечения, проведенного через две образующие, если на окружности основания оно отсекает дугу в  $90^\circ$ .

№159. Через вершину конуса под углом  $60^\circ$  к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая дугу в  $90^\circ$ . Высота конуса равна  $H$ . Вычислите площадь сечения.

№160. В конусе даны радиус основания  $R$  и высота  $H$ . Вычислите ребро вписанного в него куба.

№161. В конусе даны радиус основания  $R$  и высота  $H$  вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани - квадраты. Вычислите ребро этой призмы.

№162. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания  $a$ , двугранный угол при основании  $\alpha$ . Найдите площадь осевого сечения вписанного конуса.

№163. Боковая поверхность конуса, имеющего высоту  $H$  и радиус основания  $R$ , развернута на плоскость. Вычислите угол полученного сектора.

№164. Образующая конуса равна  $L$ , радиус основания равен  $R$ . Вычислите угол  $\alpha$  в развертке боковой поверхности конуса (рассмотрите особо случай равностороннего конуса).

№165. Полуокруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей и высотой конуса.

№166. Радиусы оснований усеченного конуса равны  $R$  и  $r$ , а высота равна  $h$ . Найдите образующую.

№167. Радиусы оснований усеченного конуса равны  $R$  и  $r$ ; образующая наклонена к основанию под углом  $\alpha$ . Найдите высоту.

№168. Радиусы оснований усеченного конуса равны 18 и 30 см; образующая равна 20 см. Найдите расстояние от центра меньшего основания до окружности большего.

№169. Радиусы оснований усеченного конуса равны  $R = 12\text{см}$  и  $r = 7\text{см}$ , образующая равна 19см. Найдите площадь осевого сечения.

№170. Площади оснований усеченного конуса составляют  $M_1$  и  $M_2$ . Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

№171. Площади оснований усеченного конуса равны 32 и 2 см<sup>2</sup>. Высота разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найдите площади сечений.

№172. Радиусы оснований усеченного конуса равны 10 и 6 см. Высота разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найдите площади сечений.

### § 3. СФЕРА И ЕЕ ЧАСТИ

№173. Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти площадь сечения.

174. Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если  $AB = 6\text{ см}$ ,  $BC = 8\text{ см}$ ,  $AC = 10\text{ см}$ .

№175. Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 10 см, 10 см и 12 см.

№176. Ребро куба равно  $a$ . Найти радиус вписанного в куб и описанного около него шаров.

№ 177. Дан шар с центром в точке  $O$ ,  $\alpha$  – касательная плоскость, точка  $A$  – точка касания, точка  $B$  лежит на плоскости  $\alpha$ ,  $AB = 21$  см,  $BO = 29$  см. Найдите радиус шара.

## 4. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

### Тема 4.1 Площади поверхностей

#### § 1. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ

*Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на длину ее бокового ребра:*

$$S_{\text{бок.пр}} = Pl.$$

*Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и двух площадей основания:*

$$S_{\text{полн.пов.}} = S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн}}$$

№178. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда 5 и 4, угол между ними  $30^\circ$ , высота параллелепипеда 8. Найти полную поверхность параллелепипеда.

№179. В правильной треугольной призме сторона основания равна 6, а высота – 8. Найти площадь полной поверхности призмы.

№180. Перпендикулярное сечение наклонной треугольной призмы с боковым ребром, равным 7 см, – треугольник со сторонами 4 см, 5 см и 7 см. Найти боковую поверхность призмы.

№181. Поверхность куба равна  $S$ . Найдите его ребро.

№182. Вычислите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, высота которого равна  $h$ , площадь основания  $S$  и площадь диагонального сечения  $Q$ .

№183. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8 см, а площадь диагонального сечения  $180 \text{ см}^2$ . Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

№184. В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро равно 12 см, площадь диагонального сечения  $312 \text{ см}^2$  и площадь основания  $240 \text{ см}^2$ .

Вычислите стороны основания.

№185. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 и 8 см и образуют угол  $60^\circ$ . Большая диагональ параллелепипеда равна 49 см. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

№186. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями 12 и 16 см; диагональ боковой грани равна 26 см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

№187. Диагонали прямого параллелепипеда образуют с плоскостью основания углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$ , а стороны оснований равны 6 и 8 см. Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

№188. По стороне основания  $a=8\text{ см}$  и боковому ребру  $l=13\text{ см}$  вычислите площадь полной поверхности правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

№189. Заполните таблицу:

Основание прямой призмы	Высота	$S_{\text{бок}}$	$S_{\text{полн}}$
а) Треугольник ABC, $\angle C=90^\circ$ , AC = 15 см, BC = 20 см	12 см		
б) Параллелограмм ABCD, $\angle A = 30^\circ$ , AB = 3, AD = 4	8		
в) Прямоугольник, стороны которого равны 14 см и 5 дм	9 см		
г) Трапеция ABCD, $\angle A=90^\circ$ , $\angle B = 60^\circ$ , AB = 7 см, AD = 3 см	8 см		

№190. Дана правильная  $n$ -угольная призма со стороной основания  $a$  и высотой  $h$ . Вычислите площадь боковой и полной поверхности призмы, если: а)  $n=3$ ,  $a = 10$  см,  $h = 15$  см; б)  $n=4$ ,  $a=12$  дм,  $h=8$  дм; в)  $n=6$ ,  $a=23$  см,  $h = 5$  дм; г)  $n=5$ ,  $a=0,4$  м,  $h = 10$  см.

№191. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 13 см, площадь боковой поверхности равна  $180 \text{ см}^2$ . Вычислите площадь основания призмы.

№192. В правильной четырехугольной призме диагональ равна  $l$  и составляет с боковой гранью угол  $\alpha$ . Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

№193. В правильной шестиугольной призме диагонали равны 17 и 15 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

№194. Площадь наибольшего сечения правильной шестиугольной призмы равна  $S$ . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

№195. Основанием прямой призмы служит трапеция  $ABCD$ , у которой параллельные стороны  $BC$  и  $AD$  равны 26 и 40 см, а непараллельные стороны  $AB$  и  $CD$  равны 15 и 13 см. Площадь сечения  $AA_1C_1C$  равна  $370 \text{ см}^2$ . Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

№196. Основанием прямой призмы служит ромб. Диагонали призмы равны 10 и  $6\sqrt{2}$  см, а высота равна 6 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

№197. В прямой треугольной призме стороны основания относятся, как 17:15:8, а боковое ребро равно 20 см. Площадь полной поверхности этой призмы равна  $2080 \text{ см}^2$ . Найдите площадь ее боковой поверхности.

№198. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 26 см, а основания равны 22 и 42 см; площадь ее диагонального сечения составляет  $400 \text{ см}^2$ . Вычислите площадь полной поверхности призмы.

№199. В прямой треугольной призме стороны основания равны 34, 50 и 52 см. Площадь сечения, проведенного через боковое ребро и большую высоту основания, равна  $480 \text{ см}^2$ . Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

№200. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной  $a$ ; боковое ребро равно  $b$ ; одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы в  $45^\circ$ . Вычислите площадь боковой поверхности этой призмы.

№201. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 10, 10 и 12 см, а боковое ребро равно 15 см. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

№202. Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ . Боковое ребро равно  $c$  и образует со сторонами основания углы в  $60^\circ$ . Вычислите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

## §2. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ И УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

*Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания пирамиды на ее апофему:*

$$S_{\text{бок.пир}} = \frac{1}{2} P \cdot a$$

*Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна полусумме периметров ее оснований, умноженной на апофему:*

$$S_{\text{бок.ус.пир}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \cdot a$$

№203. По стороне основания  $a$  и высоте  $h$  вычислите площадь полной поверхности правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

№204. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 9 см, а апофема равна 18 см.

№205. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 6, высота пирамиды 4. Найти полную поверхность пирамиды.

№206. Сторона основания правильной треугольной пирамиды 5, апофема 7. Найдите полную поверхность пирамиды.

№207. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна  $240 \text{ см}^2$ , а площадь полной поверхности равна  $384 \text{ см}^2$ . Вычислите сторону основания и высоту пирамиды.

№208. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ , а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол  $30^\circ$ . Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

№209. По стороне основания  $b$  вычислите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой площадь диагонального сечения равновелика площади основания.

№210. Вычислите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды по ее высоте  $h$  и площади боковой поверхности пирамиды.

№211. В правильной треугольной пирамиде апофема, равная 6 см, составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

№212. Площади основания и диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равны  $S$  кв. ед. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

№213. Центр верхнего основания куба и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в этот куб пирамиды. Вычислите площадь ее боковой поверхности, если ребро куба равно.

№214. В правильной шестиугольной пирамиде апофема равна 15 см, а высота равна 12 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды.

№215. Вычислите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды по ребру  $b$  и высоте  $h$ .

№216. Основание пирамиды - квадрат со стороной 16 см, а две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна 12 см.

№217. Основание пирамиды - прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4 см. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

№218. Основание пирамиды - ромб с диагоналями 6 и 8 м. Высота пирамиды равна 1 м. Вычислите площадь полной поверхности этой пирамиды, если все двугранные углы при основании равны.

№219. Основание пирамиды - треугольник со сторонами, равными 6, 10 и 14 см. Плоскости боковых граней наклонены к основанию под углом  $60^\circ$ . Вычислите полную поверхность пирамиды.

№220. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 4 см, стороны оснований 8 см и 2 см. Найти полную поверхность.

№221. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 5 и 11 дм, а диагональ пирамиды – 12 дм. Найти боковую поверхность усеченной пирамиды.

№222. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 9 дм и 12 дм, высота равна 1 дм. Найти площадь боковой поверхности.

№223. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 24 и 8 см, а высота равна 15 см. Найдите площадь полной поверхности.

### § 3. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

*Площадь боковой поверхности (площадь развертки) цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра*

$$S_{\text{бок.пов}} = 2\pi r h$$

*Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площади боковой поверхности цилиндра и двух оснований*

$$S_{\text{полн.пов}} = S_{\text{бок.пов}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

№224. Радиус основания цилиндра равен 2, высота 3. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

№225. Площадь осевого сечения цилиндра равна  $4\text{дм}$ . Найти площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на  $\pi$ .

№226. Образующая равностороннего цилиндра равна 1. Вычислить площадь боковой поверхности цилиндра.

№227. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найти высоту цилиндра.

№228. Прямоугольник ABCD со сторонами  $AD = 6\text{ см}$  и  $AB = 14\text{ см}$  вращается относительно стороны AB. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

Отв:  $168\pi\text{ см}^2$

№229. Квадрат с площадью  $169\text{ см}^2$  вращается вокруг одной из его сторон. Определить площадь полной поверхности цилиндра.

Отв:  $253,5\pi\text{ см}^2$

№230. Площадь боковой поверхности цилиндра равна  $2\pi$ , а диаметр основания – 1. Найти высоту цилиндра.

№231. Площадь боковой поверхности цилиндра составляет половину площади его полной поверхности, диагональ осевого сечения –  $5\text{ см}$ . Найти площадь полной поверхности цилиндра.

Отв:  $20\pi$

№232. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого равна  $225\text{ см}^2$ . Найти площадь полной поверхности цилиндра.

№233. Диаметр основания цилиндра равен 5 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

№234. В цилиндре через середину радиуса основания проведено сечение перпендикулярно радиусу. Сечение образует квадрат площадью  $16\text{ см}^2$ . Вычислить площадь боковой поверхности цилиндра.

Отв:  $\frac{32\pi\sqrt{3}}{3}\text{ см}^2$

№235. Высота цилиндра на  $12\text{ см}$  больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна  $288\pi\text{ см}^2$ . Найти радиус основания и высоту цилиндра.

Отв:  $6\text{ см}$ ,  $18\text{ см}$ .

№236. Из квадрата, диагональ которого равна  $d = 16\text{ см}$ , свернута боковая поверхность цилиндра. Найти площадь основания цилиндра.

Отв:  $\frac{169}{8\pi}$

#### § 4. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА И УСЕЧЕННОЙ КОНУСА

*Площадь боковой поверхности (площадь развертки) конуса*

$$S_{\text{бок}} = \pi r l$$

Площадь полной поверхности конуса

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi r l + \pi r^2$$

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + R)l$$

Площадь полной поверхности усеченного конуса

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{верх.осн}} + S_{\text{ниж.осн}} = \pi(r + R)l + \pi r^2 + \pi R^2$$

№2317. Найти площадь боковой поверхности и площадь полной поверхности конуса, если радиус основания равен 7 см, а высота конуса равна 10 см.

Отв:  $S_{\text{бок}} \approx 85,4\pi \text{ см}^2$ ;  $S_{\text{полн}} \approx 134,4\pi \text{ см}^2$

№238. Угол между образующей и осью конуса равен  $45^\circ$ , образующая равна 6,5 см. Найти площадь боковой поверхности конуса.

Отв:  $\frac{169\pi\sqrt{2}}{8} \text{ см}^2$

№239. Угол между образующей и осью конуса равен  $60^\circ$ , высота конуса равна 8 см. Найти: а) площадь боковой поверхности; б) площадь полной поверхности конуса.

Отв:  $S_{\text{бок}} \approx 221\pi \text{ см}^2$ ;  $S_{\text{полн}} \approx 415\pi \text{ см}^2$

№240. Площадь осевого сечения конуса равна  $0,6 \text{ см}^2$ . Высота конуса равна 1,2 см. Найти площадь полной поверхности конуса.

Отв:  $0,9\pi \text{ см}^2$

№241. Площадь боковой поверхности конуса равна  $80\pi \text{ см}^2$ . Найти образующую конуса, если радиус основания равен 8 см, а высота конуса 6 см.

Отв: 10 см

№242. Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислить площадь боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

Отв:  $S_{\text{бок}} = 80\pi \text{ см}^2$ ;  $S_{\text{полн}} = 144\pi \text{ см}^2$

№243. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 11 см вращается вокруг гипотенузы. Вычислить площадь боковой поверхности полученного при этом вращении тела.

№244. Радиусы оснований усеченного конуса равны  $R = 13 \text{ см}$  и  $r = 8 \text{ см}$ , а образующая составляет с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найти: а) площадь осевого сечения; б) площадь полной поверхности усеченного конуса.

Отв: а)  $S_{\text{бок}} = 148,5\pi \text{ см}^2$ ; б)  $S_{\text{полн}} = 381,5\pi \text{ см}^2$

№245. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 11 см, а высота равна 10 см. Найти площадь боковой и полной поверхности усеченного конуса.

Отв:  $S_{\text{бок}} = 187,2 \pi \text{ см}^2$ ;  $S_{\text{полн}} = 333,2 \pi \text{ см}^2$

№246. Прямоугольная трапеция ABCD с основаниями  $BC = 6$  см и  $AD = 10$  см и высотой  $AB = 13$  см вращается относительно стороны AB. Найти площадь боковой поверхности полученного усеченного конуса.

Отв:  $S_{бок} = 217,6 \pi \text{ см}^2$

#### § 4. ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

*Площадь сферы радиуса  $R$  вычисляется по формуле:  $S = 4\pi R^2$*

*Площадь сферического сегмента вычисляется по формуле:  $S = 2\pi Rh$ , где  $R$  – радиус шара,  $h$  – высота сферического сегмента*

*Площадь шарового слоя вычисляется по формуле:  $S = 2\pi Rh$ , где  $R$  – радиус шара,  $h$  – высота шарового слоя*

*Площадь поверхности шарового сектора равна:  $S = 2\pi Rh + \pi Rr$ , где  $R$  – радиус шара,  $r$  – радиус основания шарового сегмента, охватывающего шаровой сектор.*

№247. Найти площадь сферы, радиус которой равен: а) 6 см; б) 2 дм; в)  $\sqrt{2}$  см; г)  $2\sqrt{3}$  см.

Отв: а)  $144\pi \text{ см}^2$ ; б)  $16\pi \text{ дм}^2$ ; в)  $8\pi \text{ см}^2$ ; г)  $48\pi \text{ см}^2$ .

№248. Площадь сечения сферы, проходящего через ее центр, равна  $9 \text{ м}^2$ . Найти площадь сферы.

Отв:  $36 \text{ м}^2$ .

№249. Площадь сферы равна: а)  $324 \text{ см}^2$ ; б)  $121\pi \text{ дм}^2$ ; в)  $59 \text{ см}^2$ ; г)  $255 \text{ м}^2$ . Найти радиус сферы.

№250. Площадь сферы равна  $676\pi \text{ м}^2$ . Найти площадь сечения сферы, проходящего через ее центр.

Отв:  $169\pi \text{ м}^2$

№251. Вычислить радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м.

Отв: 10 м.

№252. Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 9 см и 12 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3 см. Найти площадь сферы.

Отв:  $900\pi \text{ см}^2$ .

№253. Радиус сферы равен  $R$ . Найти площадь полной поверхности описанного около сферы многогранника, если этот многогранник является: а) кубом; б) правильной шестиугольной призмой.

Отв: а)  $24R^2$ ; б)  $12\sqrt{3} R^2$ .

№254. Радиус сферы равен  $R$ . Найти площадь полной поверхности: а) вписанного в сферу куба; б) вписанной правильной шестиугольной призмы, высота которой равна  $R$ .

Отв: а)  $8R^2$  ; б)  $\frac{21\sqrt{3}}{4} R^2$  .

№255. Радиусы оснований сферического пояса составляют 10 см и 12 см, его высота – 1 см. Найти площадь поверхности сферического пояса.

Отв:  $275\pi$  см<sup>2</sup>.

№256. Найти площадь полной поверхности шарового сектора, если дуга осевого сечения сектора содержит  $120^\circ$ , а радиус шара равен  $R$ .

## Тема 4.2 Объёмы геометрических тел

### § 1. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

*Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:*

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h$$

№251. Заполнить таблицу:

№	$V$ – объем цилиндра	$r$ – радиус цилиндра	$h$ – высота цилиндра
1)	?	$2\sqrt{2}$ см	3 см
2)	$120$ см <sup>3</sup>	?	3,6 см
3)	$76\pi$ м <sup>3</sup>	4,7 м	?
4)	?	3,2 дм	54 см
5)	$8\pi$ см <sup>3</sup>	$r = h$	?

№252. Диаметр основания цилиндра равен 8 см, высота цилиндра равна  $\frac{10}{\pi}$  см.

Найти объем цилиндра.

№253. Объем цилиндра равен 156 м<sup>3</sup>. Найти высоту цилиндра, если диаметр цилиндра равен 12 м.

№254. Диагональ осевого сечения цилиндра 13см, высота 5см. Найти объем цилиндра.

№255. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна 480 см<sup>2</sup>. Высота цилиндра равна 10 см. Найти объем цилиндра.

№256. В цилиндре задано осевое сечение ABCD. AC=18см. Угол  $\angle CAD = 45^\circ$ . Найти объем цилиндра.

№257. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 16 см. Угол между диагональю и диаметром цилиндра равен  $60^\circ$ . Найти объем цилиндра.

№258. Площадь осевого сечения равна  $S = 165 \text{ см}^2$ , а площадь основания цилиндра равна  $S_1 = 121\pi \text{ см}^2$ . Найти объем цилиндра.

Отв:  $1815 \pi \text{ см}^3$

## § 2. ОБЪЕМ КОНУСА И УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Объем конуса вычисляется по формуле:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Объем усеченного конуса вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} h \cdot (S_H + S_B + \sqrt{S_H \cdot S_B}) = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

№259. Пусть  $h, r, V$  - соответственно высота, радиус и объем конуса.

Найти: а)  $V$ , если  $h = 3 \text{ см}$ ,  $r = 1,5 \text{ см}$ ; б)  $h$ , если  $V = 48\pi \text{ см}^3$ ,  $r = 4 \text{ см}$ ; в)  $r$ , если  $h = 5 \text{ см}$ ,  $V = 65\pi \text{ см}^3$ .

№260. Найти объем конуса, если высота конуса равна диаметру его основания и равны  $14 \text{ см}$ .

№261. Найти объем конуса, если его образующая равна  $13 \text{ см}$ , а площадь осевого сечения равна  $60 \text{ см}^2$ .

№262. Радиусы оснований усеченного конуса равны  $3 \text{ м}$  и  $6 \text{ м}$ , а образующая равна  $5 \text{ м}$ . Найти объем усеченного конуса.

№263. Заполнить таблицу:

№	$V$ – объем усеч. конуса	$r$ – радиус верх.осн.	$R$ – радиус ниж.осн.	$h$ – высота усеч.конуса
1)	?	$2\sqrt{2} \text{ см}$	$5 \text{ см}$	$3 \text{ см}$
2)	$120 \text{ см}^3$	?	$6 \text{ см}$	$3,6 \text{ см}$
3)	$76\pi \text{ м}^3$	$4,7 \text{ м}$	$13 \text{ м}$	?
5)	$31\pi$	$3$	?	$12$

## § 4. ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Объем шара равен:  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Объем шарового сегмента:  $V = \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right)$

Объем шарового слоя:

$V = \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h(a^2 + ab + b^2)$ , где  $a$  и  $b$  – расстояния от центра шара до секущих плоскостей

$V = \frac{1}{6} \pi h (3r_1^2 + 2r_2^2 + h^2)$ , где  $r_1, r_2$  – радиусы оснований шарового слоя ( $r_1 > r_2$ )

Объем шарового сектора:  $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$

№263. Пусть  $V$  – объем шара радиуса  $R$ , а  $S$  – площадь его поверхности. Найти: а)  $S$  и  $V$ , если  $R = 4$  см; б)  $R$  и  $S$ , если  $V = 113,04$  см<sup>3</sup>; в)  $R$  и  $V$ , если  $S = 64\pi$  см<sup>2</sup>.

№264. В шаре на расстоянии 3 см от центра проведено сечение, радиус которого 4 см. Найти объем шара.

№265. Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр, равна  $4\pi$  см<sup>2</sup>. Найти объем шара.

№266. Диаметр Луны составляет примерно четвертую часть диаметра Земли. Сравнить объемы Луны и Земли, считая их шарами.

№267. Найти объем шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

№268. Диаметр шара разделен на три равные части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные к диаметру. Найти объем получившегося шарового слоя, если радиус равен  $R$ .

№269. Найти объем шарового сектора, если радиус окружности основания соответствующего шарового сегмента равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

№270. Как изменится объем шара, если его радиус: а) уменьшить в 2 раза; б) увеличить в 3 раза.

№271. Шар с центром в точке  $O$  касается плоскости в точке  $A$ . Точка  $B$  лежит в плоскости касания. Найти объем шара, если  $AB = 21$  см,  $BO = 29$  см.

## 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### Тема 5.1. Элементы комбинаторики

№269. Вычислите  $A_7^3$ ;  $P_5$ ;  $C_6^4$ .

№270. Вычислите  $P_8$ ;  $A_{13}^7$ ;  $C_{12}^6$ .

№271. Найдите число размещений из  $n + 1$  элементов по  $k - 1$ .

№272. Найдите число размещений из  $m + n$  элементов по  $m - n + 1$ .

№273. Проверьте справедливость равенства:

1)  $C_9^3 = C_6^9$ ;

2)  $C_{12}^5 = C_{12}^7$ ;

3)  $C_6^4 + C_6^3 = C_7^4$ ;

4)  $C_{10}^6 + C_{10}^5 = C_{11}^6$ ;

№274. Найдите число сочетаний из  $n + 2$  элементов по  $k - 1$  в каждом.

- №275. Найдите число сочетаний из  $m - n$  элементов по  $n + 1$  в каждом.
- №276. Сколькими способами можно рассадить за столом четырех человек?
- №277. Сколькими способами можно составить четырёхцветные ленты из семи лент различных цветов?
- №278. Сколькими способами можно выбрать четырех лиц на четыре разные должности из девяти кандидатов?
- №279. Сколько необходимо взять предметов, чтобы число размещений из них по 4 было в 12 раз больше числа размещений по 2?
- №280. Сколькими способами можно выбрать 3 из 6 открыток?
- №281. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?
- №282. Сколько можно составить сладких наборов по 3 шоколадки и 2 зефира из 9 различных шоколадок и 6 различных зефиров?
- №283. Сколько различных слов можно составить из букв слова «МАТЕМАТИКА»?
- №284. Сколькими способами могут сесть пять СМЕШАРИКов в космический корабль, если каждый из них может быть пилотом?
- №285. Сколькими способами можно выбрать трех ответственных за праздник, посвященный 9МАЯ, из студенческой группы, в которой 24 человека?
- №286. Сколькими способами филателист может выбрать три марки из пяти, предложенных продавцом?
- №287. Сколькими способами можно разложить 12 различных игрушек по трем ящикам?
- №288. Студенческая группа насчитывает 30 человек, из которых необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Необходимо найти количество способов сделать данное действие.
- №289. На конференции выступают 6 участников, порядок определяется жеребьевкой. Нам нужно найти количество возможных вариантов жеребьевки.
- №290. При окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек перешло из рук в руки, если во встрече участвовали 6 специалистов?
- №291. В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?
- №292. Группу студентов из двадцати пяти человек необходимо разбить на три подгруппы по шесть, девять и десять человек.
- №293. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «камзол»?
- №294. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»?

№295. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить при помощи цифр 4, 7, 9? (Цифры в записи числа не повторяются).

№296. Пятеро друзей сыграли между собой по одной партии в шахматы. Сколько всего партий было сыграно?

№297. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Та же, если одна из полос должна быть красной?

№298. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

### Тема 5.2. Элементы теории вероятностей

№299. В корзине 9 красных шаров и 3 синих. Шары различаются только цветом. Наугад (не глядя) достаём один из них. Какова вероятность того, что выбранный таким образом шар окажется синего цвета?

№300. Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 15 докладчиков, в третий день – 20. Какова вероятность того, что доклад профессора М. выпадет на третий день, если порядок докладов определяется жеребьевкой?

№301. В жеребьевке участвуют 5 немцев, 8 французов и 3 эстонец. Какова вероятность того, что первым будет выступать француз.

№302. Студент при подготовке к экзамену не успел выучить один билет из 25, предложенных на экзамен. Какова вероятность того, что студенту достанется на экзамен не выученный билет?

№303. Какова вероятность того, что при 8 бросаниях монеты герб выпадет 5 раз?

№304. За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

№305. В секции 21 спортсмен, среди них два друга - Андрей и Михаил. Спортсменов случайным образом делят на 3 равные группы. Какова вероятность того, что спортсмены Андрей и Михаил попадут в одну и ту же группу.

№306. В ящике с деталями оказалось 300 деталей I сорта, 200 деталей II сорта и 50 деталей III сорта. Наудачу вынимают одну из деталей. Чему равна вероятность вынуть деталь I, II, или III сорта?

№307. В урне находятся 20 белых и 15 черных шаров. Наудачу вынимают один шар, который оказывается белым, и откладывают его в сторону. После этого берут ещё один шар. Найдите вероятность того, что этот шар окажется белым.

№308. В урне находятся 7 белых и 5 черных шаров. Найдите вероятность того, что 1) наудачу вынутый шар окажется черным; 2) два наудачу вынутых шара окажутся черными.

№309. Считая выпадение любой грани игральной кости одинаково вероятным, найдите вероятность выпадения грани с нечётным числом очков.

№310. В ящике в случайном порядке выложены 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролер берет наудачу 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окажется стандартной.

№311. Вероятность попадания баскетболистом в кольцо равна 0,6. Баскетболист сделал серию из четырёх бросков. Какова вероятность того, что при этом было ровно три попадания?

№312. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо 4 и 5 одновременно.

№313. Рабочий обслуживает два автомата, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый автомат не потребует внимания рабочего, равна 0,8, а для второго автомата эта вероятность 0,7. Найдите вероятность того, что в течении часа ни один из автоматов не потребует внимания рабочего.

№314. В урне находятся 6 шаров, из которых 3 белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Вычислите вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

№315. В урне находятся 10 белых и 6 черных шаров. Найдите вероятность того, что три наудачу вынутых один за другим шара окажутся черными.

№316. В ящике сложены 16 деталей, изготовленных на первом участке, 24 на втором, 20 – на третьем. Вероятности  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  того, что детали, изготовленные на соответствующих участках, имеют отличное качество, составляет  $P_1 = 0,8$ ,  $P_2 = 0,6$ ,  $P_3 = 0,8$ . Определите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1) Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа: учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват.учрежд., М.: Просвещение, 2012.
- 2) Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 -11: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни М.: Просвещение, 2011.
- 3) Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2010.
- 4) Григорьев С.Г. Математика: учебник для студентов сред. проф. учреждений / С.Г. Григорьев, С.В. Задулина; под ред. В.А. Гусева. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 384 с.
- 5) Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 11 кл. в 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) – М.: Мнемозина, 2014 г.